

Caractérisation du rayonnement acoustique d'un haut-parleur monté sur une enceinte parallélépipédique allongée

Application à une barre de son

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'École Polytechnique

École doctorale n°579, SMEMaG
Spécialité de doctorat : Acoustique

Thèse soutenue à Palaiseau, le 25/01/2018, par

Vincent Roggerone

Composition du jury :

Marc BONNET Directeur de Recherche, ENSTA (CNRS)	Président
Alain BERRY Professeur, Univ. de Sherbrooke (GAUS)	Rapporteur
Didier CASSEREAU Maître de Conférence, UPMC (CNRS)	Rapporteur
Philippe HERZOG Directeur de Recherche, Lab. de Mécanique et d'Acoustique (CNRS)	Examineur
Thomas HÉLIE Directeur de Recherche, IRCAM (CNRS)	Examineur
Xavier BOUTILLON Directeur de Recherche, École Polytechnique (CNRS)	Directeur de thèse
Étienne CORTEEL Director of Scientific Outreach, L-Acoustics	Co-directeur de thèse

Résumé

Le rayonnement d'un haut-parleur monté sur une enceinte est généralement caractérisé par des mesures ou une simulation par la méthode des éléments finis. Cependant, ces méthodes de référence restent très coûteuses et ne permettent pas une interprétation physique des résultats. Dans ce manuscrit, nous proposons deux modèles analytiques pour prédire ce rayonnement, dans le cadre d'une application à une barre de son. Le premier modèle consiste à assimiler la géométrie de la barre de son à un sphéroïde. De cette manière, les variables sont séparées et on peut trouver une solution analytique sous la forme d'une somme d'harmoniques sphéroïdales. On décrira chaque étape de la méthode, ainsi que la comparaison des résultats à ceux des méthodes de référence. On développera particulièrement le calcul pour un haut-parleur circulaire sur le sphéroïde et la mise en place d'un critère de troncature des harmoniques. Ce modèle fonctionne bien en basse-fréquence, mais ne peut pas rendre compte de tous les phénomènes de diffraction par l'enceinte en haute fréquence. Pour celles-ci, la diffraction du champ sonore par les arêtes de l'enceinte devient non négligeable. Nous avons donc développé un second modèle analytique, basé sur une formulation intégrale de cette diffraction. Celle-ci est vue comme un ensemble de sources secondaires localisées sur les arêtes. On montrera comment établir ce modèle et on donnera des détails sur son implémentation. L'application de ce modèle permet d'interpréter physiquement le rayonnement d'une barre de son, et donc de conclure sur la validité du modèle sphéroïdal. On montre également comment les arêtes du baffle d'une enceinte entraînent des effets d'interférences constructives, qui peuvent induire un gain allant jusqu'à 3 dB. Ces effets entraînent également un phénomène contre-intuitif : si le haut-parleur n'est pas centré sur le baffle, la direction du maximum d'intensité du rayonnement tend à se décaler vers le côté opposé au décalage du haut-parleur sur le baffle.

Mots-clés : Acoustique, Rayonnement, Harmoniques sphéroïdales, Modèles numériques, Diffraction, Modèles non-linéaires.

Abstract

The radiation from a loudspeaker mounted on a box shaped enclosure is usually characterized by measurements or simulations based on finite element method. However, these reference methods are still very expensive and do not allow for a physical interpretation of the results. In this manuscript, two analytical models are proposed to predict this radiation, within the framework of the application to a sound bar. The first model consists of assimilating the sound bar geometry to a spheroid. In this way, the variables are separated and an analytical solution can be found in the form of a sum of spheroidal harmonics. The calculation for a circular loudspeaker on the spheroid, as well as a harmonic truncation criterion, is detailed. Each step of the method will be described, as well as the comparison of the results with the reference methods. The calculation for a circular loudspeaker on the spheroid and the implementation of a harmonic truncation criterion will be developed. This model works well at low-frequency, but cannot account for the diffraction phenomena, which come from the enclosure and appear at high-frequency. Therefore, we have developed a second analytical model based on an integral formulation of the diffraction. This model is seen as a set of secondary sources located on the edges of the enclosure. It will be shown how to establish this model and how it can be implemented. This model allows us to interpret the radiation of a sound bar, and therefore allows us to conclude on the validity of the spheroidal model. It also shows how the baffle edges of a loudspeaker enclosure lead to constructive interference effects, resulting in a gain up to 3 dB. These effects also lead to a counterintuitive phenomenon : if the speaker is not centered on the baffle, the direction of maximum radiation intensity tends to shift to the opposite side of the speaker offset on the baffle.

Keywords : Acoustic, Radiation, Spheroidal harmonics, numerical models, diffraction, non-linear models

Remerciements

Cette thèse est l’aboutissement de mes trois dernières années de travail, mais je n’en suis pas le seul acteur. Je souhaite remercier ici un certain nombre de personnes qui m’ont permis d’y arriver.

Mes premiers remerciements sont adressés à mes encadrants, Xavier et Étienne, qui ont cru en moi dès le premier rendez-vous, alors que moi-même j’y croyais moyen. Au-delà de l’apport brut de leurs compétences sur leurs domaines d’expertise, ils ont su me laisser la liberté d’aller aussi loin que je le souhaitais dans des sujets plus éloignés, pour ensuite me suivre dans ces terres inconnues et enfin m’aider à en tirer ce manuscrit. Merci de m’avoir appris à faire de la recherche et à réaliser ainsi un de mes rêves d’enfant. Merci également d’avoir été là humainement lors des coups durs.

Je voudrais remercier également Marc Rébillat pour m’avoir orienté vers Xavier et Étienne (et Catherine avant et Brian encore avant !), ainsi que d’avoir bien voulu écouter et collaborer à mes idées sur les modèles de Hammerstein. Je remercie également Marc Bonnet d’avoir pris de son temps pour me livrer tous les détails du moteur BEM et d’avoir bien voulu présider ce jury. Je remercie également mes rapporteurs Alain Berry et Didier Cassereau d’avoir bien voulu relire ce manuscrit rempli de calculs, ainsi que Thomas Hélie et Philippe Herzog d’avoir bien voulu participer au jury. Enfin, je voudrais remercier les acteurs du projet Edison 3D, qui malgré nos sujets assez éloignés, ont toujours su s’intéresser à mon travail.

Je tiens également à remercier le LMS, en commençant par Gautier, premier vrai contact du labo. Puis tous les doctorants et post-doctorants sans qui je n’aurais jamais pu décompresser le midi au baby-foot, à l’escalade le soir ou dans les bars. Merci à Jean-Pierre, Anthony, Audrey, Yanis, Errato, Anchal, Laurent, Alexandre, Erwan, Siva, Florent, Othmane, Clément, Thomas, Ludo et ceux que j’oublie dans la liste mais que je n’oublierais pas en vrai. Le LMS c’est aussi l’équipe “des grands”, qui ont été tous aussi présents que les autres. Merci en particulier à Hakim, Jean-Marc, Laurence, Martin, Jean-Christophe, François, Denis, Ali et William pour leurs aides précieuses, sans oublier la *dream team* composée d’Alexandra, Christiane, Anna, Danielle et Valérie.

Je dois également remercier mes amis, en commençant par mes amis parisiens, marseillais, grenoblois, ou toulonnais qui ont été là tout au long de cette thèse. Merci aux thésards Pierre, John, Chapeau, Simon, Binaud, Ron, Elise, Manon, Alice, Kenan, Swann, Anna et Michou. Merci à mes colocos Gwenn, Anaïs, Fab, Vinvin et à mes presque colocos Marie, Philou et Miléna. Merci aux Marseillais et aux Toulonnais Val, Colonel, Jérémy et Anaïs. Merci aux Opuliciens Matthias, Adam & Léa, Aurélie & Charlie, Pimousse et Lilo. Merci aux amis d’enfance qui sont et seront toujours là : Bobby, Lucas, Matthieu et Vivien.

Je terminerais par ma famille, qui m’a toujours soutenu et m’a donné le goût d’être celui que je suis aujourd’hui. Merci à ma mère, ses émotions légendaires et son soutien sans faille, de toute nature. Merci à mon père pour son support, son inspiration de la musique et du son. Merci à la fratrie des Permingeat et à Olga. Merci à mes grands-parents, corses et cannois. Mention spéciale pour ma grande sœur Malou et encore plus spéciale pour ma petite sœur Manon, ma première et préférée petite sœur.

Mes derniers mots sont dédiés à Juliette *MiAmor*, à qui je dédicace cette thèse. Sans toi, je ne sais pas si j’aurais pu commencer, continuer et terminer cette thèse. Décrire tout ce que tu m’as apporté ces trois dernières années nécessiterait l’écriture d’un second manuscrit.

TABLE DES MATIÈRES

Contexte et Organisation	11
1 Contexte scientifique	11
2 Organisation du manuscrit	12
3 Contributions	13
I Champ acoustique rayonné par une enceinte parallélépipédique : méthodes de référence	15
1 Introduction générale	16
1.1 Motivation et position du problème	16
1.2 Fonctionnement et modélisation d'un haut-parleur	18
1.3 Influence et modélisation du champ acoustique interne	21
1.4 Modèle de la diffraction du son par l'enceinte	23
2 Mesures	24
2.1 Protocole de mesure	25
2.1.1 Matériel et montage	25
2.1.2 Protocole de mesure	26
2.2 Identification d'un système de Hammerstein	29
2.2.1 Modèle de Hammerstein en parallèle avec un sinus glissant arbitraire en entrée (ASS)	29
2.2.2 Identification par la méthode du sinus glissant exponentiel (ESS) . .	31
2.2.3 Différences entre les deux méthodes ESS de Novak et Rébillat. . . .	32
2.2.4 Méthode utilisée	34
2.3 Post-traitement	37
3 Éléments finis de frontière	39
3.1 Principe	39
3.1.1 Définition du problème	39
3.1.2 Représentation intégrale	40
3.1.3 Principe de résolution	41
3.2 Calcul numérique	42
3.2.1 Discrétisation et fonction de forme	42
3.2.2 Quadrature de Gauss-Legendre	45
4 Résultats	47
4.1 Directivité horizontale	47
4.1.1 Méthode de visualisation	47
4.1.2 Observation	48
4.1.3 Discussion et Interprétation	48
4.2 Motif de rayonnement tridimensionnel	53

4.2.1	Méthode de visualisation	53
4.2.2	Résultats	53
4.2.3	Discussion et Interprétation	54
4.3	Puissance rayonnée et réponse en fréquence dans l'axe	57
4.3.1	Méthode de visualisation	57
4.3.2	Résultats	59
4.3.3	Discussion et Interprétation	59
5	Conclusion	61

II Méthode orientée basse-fréquence : le modèle sphéroïdal 63

1	Introduction	64
2	Rayonnement d'un piston sur une enceinte sphéroïdale	67
2.1	Le système de coordonnées sphéroïdales	67
2.1.1	Les coordonnées sphéroïdales	67
2.2	Expression de la pression rayonnée par un piston sur une enceinte sphéroïdale	70
2.2.1	Définition du problème	70
2.2.2	Solution générale de l'équation de Helmholtz par la méthode de séparation des variables	71
2.2.3	Restrictions issues des propriétés des fonctions sphéroïdales.	72
2.2.4	Utilisation des conditions limites	73
3	Calcul pour un piston <i>carré</i> ou <i>circulaire</i>	75
3.1	Portions latérales quasi-rectangulaires	75
3.2	Portions quasi-circulaires	77
3.2.1	Portions quasi-circulaires extrémales	77
3.2.2	Portions quasi-circulaires latérales	77
4	Critère de troncature des harmoniques sphéroïdales	78
4.1	Harmoniques sphéroïdales	79
4.1.1	Définition	79
4.1.2	Propriétés	79
4.1.3	Court-circuit acoustique et critère de troncature	85
4.2	Puissance rayonnée et facteur de rayonnement modal	87
4.2.1	Puissance rayonnée	87
4.2.2	Facteur modal de rayonnement	88
4.2.3	Modes rayonnants et modes non-rayonnants	89
5	Mise-en-œuvre : choix du sphéroïde	96
5.1	Caractéristiques recherchées	96
5.2	Expression des contraintes	97
5.2.1	Contraintes directes	97
5.2.2	Contraintes indirectes	97
5.3	Combinaisons de contraintes et visualisation des sphéroïdes obtenus	98
6	Résultats	101
6.1	Convergence de la solution	101
6.2	Forme du sphéroïde	102
6.3	Directivité horizontale	105
6.4	Motif de rayonnement tridimensionnel	105

6.5	Puissance rayonnée et réponse en fréquence dans l'axe	111
6.6	Temps de calcul	113
7	Discussion	114
7.1	Utilisation du critère de troncature	115
7.2	Sphéroïde optimal dans le cadre de la modélisation	115
7.3	Modélisation d'un haut-parleur en position extrême	116
7.4	Modélisation d'un haut-parleur en position latérale	117
8	Conclusion et Perspectives	118

III Méthode orientée haute-fréquence : Modèle *Edge Source Integral*

Equation	ou modèle de diffraction	121
1	Introduction	122
2	Modèle BTM	126
2.1	Démonstration par la méthode de Pierce	126
2.1.1	Objectif et idée de la démonstration :	128
2.1.2	Expression de la solution générale en champ libre :	129
2.1.3	Solution en présence de l'arête	131
2.2	Solution de Biot-Tolstoy	137
2.2.1	Principe de la démonstration de Biot-Tolstoy	137
2.2.2	Formule de Biot-Tolstoy	138
2.2.3	Équivalence avec la formule BTM	138
2.3	Formulation de Svensson	139
2.3.1	Le champ diffracté dans le domaine temporel	139
2.3.2	Le champ diffracté dans le domaine fréquentiel.	142
2.3.3	Singularités aux frontières	143
2.3.4	Expression alternative de la fonction β	144
2.4	Interprétations physiques de la diffraction	145
2.4.1	La diffraction sous forme de sources secondaires	145
2.4.2	Influence des sources secondaires	145
2.4.3	Influence de la fréquence	146
2.4.4	Signe du champ diffracté	146
3	Méthode ESIE	147
3.1	Diffraction par deux arêtes successives	147
3.1.1	Description phénoménologique	147
3.1.2	Convergence	149
3.1.3	Contribution du champ diffracté d'ordre 2	149
3.1.4	Contribution du champ diffracté d'ordre 3 et plus	150
3.2	Application à un polyèdre convexe	151
3.2.1	Calcul du champ direct, réfléchi et diffracté d'ordre 1	152
3.2.2	Calcul du champ diffracté d'ordre 2 et plus	154
4	Application à une enceinte rectangulaire et implémentation	157
4.1	Cas particulier du polyèdre rectangulaire	157
4.1.1	Hypothèses géométriques et conséquences	157
4.1.2	Facteurs de Visibilité	159
4.2	Calcul numérique	161

4.2.1	Schéma d'intégration numérique	161
4.2.2	Discrétisation des arêtes	161
4.2.3	Ordre de diffraction nécessaire	162
4.3	Source étendue et méthode d'implémentation	163
4.3.1	Calcul des opérateurs	163
4.3.2	Extension à une source étendue	164
5	Résultats	164
5.1	Paramètres du modèle ESIE	165
5.1.1	Ordre minimum	165
5.1.2	Nombre de points minimums pour l'intégration	167
5.1.3	Temps de calcul	169
5.2	Comparaison ESIE et BEM	171
5.3	Analyse des directivités 3D à l'aide du modèle ESIE	172
5.3.1	Enceinte A	172
5.3.2	Enceinte C	176
6	Conclusion et perspectives	180
 Conclusion générale et perspectives		183
 A Description des enceintes		185
 B Méthode de Visualisation		189
 C Coordonnées curvilignes et expression des opérateurs courants		195
 D Parallel Hammerstein Model Identification using Sine Sweep and the Welch Method		199
 Références		207

Introduction

Aperçu. Cette thèse propose de caractériser l'influence de la forme d'une barre de son, et plus généralement d'une enceinte, sur son rayonnement, en vertu du phénomène de diffraction. Cette caractérisation intervient sous la forme de deux modèles analytiques, alternatifs aux méthodes classiques que sont la mesure et la méthode des éléments finis. Le premier modèle assimile l'enceinte à une forme sphéroïdale tandis que le second modèle calcule le champ diffracté par les arêtes de l'enceinte.

1 Contexte scientifique

Ce travail est le fruit d'une collaboration entre Étienne Corteel, initialement Chief Technology Officer à Sonic Emotion Labs (75 rue de Lourmel, 75015) et maintenant Director of Scientific Outreach à L-Acoustics (13 rue Levachet Cintrat, 91460), et Xavier Boutillon, directeur de recherche CNRS au LMS (Laboratoire de Mécanique des Solides, Route de Saclay, 91120). Ils forment l'équipe encadrante de cette thèse. J'ai également été amené à travailler avec Marc Rebillat, maître de conférences dans l'équipe DYSCO du PIMM (Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux) à l'ENSAM (Arts et Métiers ParisTech), dans le cadre de la modélisation des non-linéarités d'un haut-parleur.

Cette thèse a été financée dans le cadre du projet ANR-13-CORD-0008 Edison 3D¹. C'est un projet de recherche coopératif entre Sonic Emotion Labs (bureau de R&D dans le domaine audio), le Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS, École polytechnique), Radio-France, deux laboratoires de Télécom Paris Tech et l'Université de Bretagne Occidentale portant sur l'édition, l'archivage et la restitution des aspects tridimensionnels du son. Plus précisément, ce travail s'inscrit dans le processus de conception des enceintes comportant plusieurs haut-parleurs, et destinées à la restitution tridimensionnelle d'une scène sonore chez le particulier. Les barres de son sont une réponse à cette demande. Par leur grand nombre de haut-parleurs, elles permettent d'éviter de positionner de nombreuses enceintes partout dans la pièce. Cela permet de réduire la variabilité entre les différentes configurations possibles, et donc de mieux contrôler l'impact de leurs rayonnements, et ainsi aboutir à une meilleure restitution. Ce travail, qui caractérise leurs rayonnements tridimensionnels, permettra de simplifier leurs conceptions et leurs optimisations. Une vision d'ensemble plus précise du projet Edison 3D est disponible dans [36].

Nous espérons que les résultats de ce travail sur le rayonnement d'une enceinte intéressera aussi bien les acousticiens que les numériciens, physiciens et le secteur industriel de l'audio. Cette thèse commence par résumer les mécanismes à l'œuvre dans une enceinte acoustique et leurs conséquences, au moyen d'une revue de littérature. La description précise de toutes les étapes d'une mesure qui permet de caractériser le rayonnement tridimensionnel d'une enceinte, ainsi que son pendant numérique, s'y trouvent également. Ensuite, le développement du modèle d'enceinte sphéroïdale constitue un exemple d'utilisation de la méthode de séparation des variables en physique, avec des coordonnées inha-

1. <http://www.agence-nationale-recherche.fr/Projet-ANR-13-CORD-0008>

bituelles, ainsi qu'un exemple original d'application. Enfin, le développement du modèle de diffraction par une arête finie montre comment l'analyse complexe peut être utilisée et interprétée en acoustique. Son application à une enceinte met en évidence les problèmes numériques qui apparaissent lors de l'implémentation. Ces problèmes sont explorés et les performances sont comparées à la méthode des éléments finis de frontière, ce qui permet d'évaluer l'intérêt d'un tel modèle en fonction de l'application recherchée.

2 Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est organisé en trois chapitres, qui peuvent être lus pratiquement indépendamment :

Méthodes de référence. Le premier chapitre décrit les méthodes de référence, auxquelles seront comparés les modèles des chapitres suivants. Ce chapitre s'ouvre sur l'introduction générale à la problématique de ce manuscrit. En particulier, on décrit tous les mécanismes physiques à l'œuvre dans une enceinte par le biais d'une revue de littérature. Cela nous permet de définir précisément ce que l'on cherche à modéliser dans cette thèse : l'influence de la forme de l'enceinte sur le rayonnement, par le biais de la diffraction du son sur l'enceinte. Dans ce manuscrit, on applique nos méthodes au cas particulier des barres de son, mais les méthodes utilisées pourraient s'appliquer à n'importe quel type d'enceinte rectangulaire. Le cœur du chapitre est la description des deux méthodes de référence utilisées dans cette thèse pour caractériser ce phénomène : la mesure des réponses impulsionnelles en champ libre et la caractérisation du rayonnement acoustique par la méthode des éléments finis de frontière. On vérifie ensuite les résultats obtenus avec ces deux dernières méthodes, en les comparant.

Modèle sphéroïdal. Le second chapitre est dédié au modèle sphéroïdal. Puisqu'il n'existe pas d'expression analytique décrivant le rayonnement d'une enceinte rectangulaire, on compare celui-ci avec le rayonnement d'une enceinte sphéroïdale, pour lequel il existe une expression analytique obtenue par la méthode de séparation des variables. Les coordonnées sphéroïdales sont privilégiées car elles permettent de décrire le caractère allongé de la barre de son. Le chapitre s'ouvre sur une revue de littérature des différents modèles acoustiques qui utilisent des solutions analytiques basées sur la méthode de séparation des variables. On insiste particulièrement sur les utilisations du modèle sphéroïdal. On étudie ensuite analytiquement le rayonnement d'un piston sur une enceinte sphéroïdale sous différents aspects : établissement de l'expression, convergence des harmoniques sphéroïdales et calcul pour différentes formes de piston. Ensuite, on propose une méthode pour choisir le sphéroïde en fonction des dimensions de la barre de son étudiée. On finit par comparer les résultats obtenus avec les méthodes de référence. On constate que ce modèle n'est pas suffisant en haute-fréquence, car il n'est pas capable de décrire correctement les interférences issues du baffle rectangulaire de la barre de son.

Modèle de diffraction. Le troisième chapitre est dédié à la méthode ESIE (*Edge Source Intégrale Equation*). Cette méthode se base sur une expression intégrale du champ sonore diffracté par une arête. Par mise en cascade, lorsqu'on est en présence de plusieurs arêtes, on peut établir un modèle permettant de décrire le rayonnement d'une enceinte

rectangulaire. Celui-ci prend la forme d'une somme du champ direct, du champ réfléchi, et des différents ordres du champ diffracté. Ces derniers sont interprétés comme provenant d'un ensemble de sources secondaires localisées sur les arêtes de l'enceinte. Ce chapitre s'ouvre sur une revue de littérature des différents modèles de diffraction par une arête, et de leurs applications en acoustique. Puis, on ré-établit la formule de Svensson qui décrit la diffraction pour une arête finie, et on montre comment établir un modèle général pour une enceinte. Cette démarche nous permettra de justifier notre interprétation de la diffraction. On donne ensuite des détails sur notre implémentation, ainsi que les différences avec l'implémentation de Svensson, rendue disponible récemment. On compare ensuite leurs performances avec le modèle éléments finis du premier chapitre. Un autre avantage de cette méthode vient des possibilités de visualisation des ordres du champ diffracté. Cela nous permet de mettre en évidence que l'effet d'interférence constructive, absent dans le modèle sphéroïdal, provient principalement de l'ordre 1 du champ diffracté. Cela nous permet également de montrer que cette interférence peut décaler la direction principale d'émission d'une enceinte de manière significative, si le haut-parleur n'est pas centré sur le baffle.

3 Contributions

Dans cette section, on précise exactement où sont situées les contributions et innovations apportées par cette thèse par rapport à l'état de l'art.

Méthodes de référence.

[Sect. 2.2] Identification d'un système de Hammerstein : description de la méthode de Novak et de Rebillat sous un même formalisme, mettant en évidence les avantages et inconvénients de chaque méthode.

[Annexe D] Identification d'un système de Hammerstein : établissement d'une nouvelle méthode d'identification par sinus glissant, basée sur le domaine fréquentiel plutôt que le domaine temporel.

Modèle sphéroïdal.

[Sect. 3] Calcul du rayonnement d'un piston sur un sphéroïde lorsque celui-ci est quasiment circulaire plutôt que rectangulaire. Il est alors défini comme l'intersection d'une boule et d'un sphéroïde.

[Sect. 4 et Sect. 6.1] Mise en place d'un critère de troncature pour la double somme sur les harmoniques sphéroïdales qui apparaît dans l'expression du rayonnement. Ce critère provient d'une interprétation physique des modes de rayonnement. On le vérifie empiriquement et expérimentalement.

[Sect. 5 et Sect. 6.2] Proposition et étude de différentes méthodes permettant de choisir les dimensions d'un sphéroïde, en vue de modéliser le rayonnement d'une barre de son rectangulaire.

[Sect. 6] Comparaison des résultats obtenus avec le modèle sphéroïdal aux résultats provenant des éléments finis.

Modèle de diffraction.

- [Sect. 2.1 et Sect. 2.4] Description et interprétation approfondie des différentes étapes nécessaires lors de l'établissement de l'expression du champ diffracté par une arête, ainsi que de la formule finale.
- [Sect. 4] Application de la méthode ESIE à une enceinte rectangulaire et extension de la méthode à une source étendue localisée sur l'enceinte.
- [Sect. 5.1 et Sect. 5.2] Comparaison des performances du modèle ESIE avec la méthode des éléments finis (nombre de points nécessaires, ordre minimum et temps de calcul).
- [Sect. 5.3] Mise en évidence d'un décalage de la direction principale d'émission d'une enceinte rectangulaire, dû à un effet d'interférence positif. Le phénomène apparaît lorsque le haut-parleur n'est pas centré sur le baffle. La direction d'émission est opposée au décalage du haut-parleur sur le baffle, c'est-à-dire que si le haut-parleur est décalé vers la droite du baffle, celui-ci aura tendance à émettre vers la gauche, dans une certaine plage de fréquences.

Champ acoustique rayonné par une enceinte parallélépipédique : méthodes de référence

Résumé

Dans ce chapitre, après avoir bien défini la problématique de ce manuscrit, on présente les deux méthodes qui serviront de référence dans les chapitres suivants, pour ensuite les comparer. Elles consistent en une mesure et un modèle numérique sous forme d'une méthode d'éléments finis de frontière. En début de chapitre, on décrit tous les phénomènes pouvant affecter le rayonnement d'un système de restitution sonore, à l'aide d'une revue bibliographique. Cela nous permet de justifier les hypothèses du modèle numérique, i.e un piston plan circulaire à vitesse uniforme monté sur une enceinte parfaitement rigide. On décrit ensuite précisément le protocole de mesure, ainsi que le traitement des données brutes. On y explique notamment comment on mesure le rayonnement de l'enceinte dans toutes les directions de l'espace, comment on sépare la partie linéaire et non-linéaire du rayonnement ainsi que le champ direct et le champ réfléchi. On détaille ensuite précisément la méthode des éléments finis de frontière utilisée et l'implémentation que l'on en a faite. Enfin, on compare les résultats issus des deux méthodes aux moyens de différents outils. La comparaison montre que la méthode des éléments finis est cohérente avec les mesures et plus fiable que celles-ci. On fait donc le choix de la garder comme méthode de référence. On donne également des interprétations physiques succinctes des phénomènes observés ainsi que des écarts entre les deux méthodes.

Table des matières

1	Introduction générale	16
1.1	Motivation et position du problème	16
1.2	Fonctionnement et modélisation d'un haut-parleur	18
1.3	Influence et modélisation du champ acoustique interne	21
1.4	Modèle de la diffraction du son par l'enceinte	23
2	Mesures	24
2.1	Protocole de mesure	25
2.2	Identification d'un système de Hammerstein	29
2.3	Post-traitement	37
3	Éléments finis de frontière	39
3.1	Principe	39
3.2	Calcul numérique	42
4	Résultats	47
4.1	Directivité horizontale	47
4.2	Motif de rayonnement tridimensionnel	53
4.3	Puissance rayonnée et réponse en fréquence dans l'axe	57
5	Conclusion	61

1 Introduction générale

1.1 Motivation et position du problème

Un système de restitution sonore, souvent abusivement appelé enceinte acoustique ou haut-parleur, est un système qui, pour un signal électrique en entrée, émet une onde sonore en sortie. Il est composé dans sa forme la plus simple d'un système d'amplification et d'un haut-parleur monté sur une enceinte, aussi appelé cabinet. Un haut-parleur transforme l'énergie électrique en énergie mécanique par le biais d'un moteur, composé d'un aimant et d'une bobine. Puis, l'énergie mécanique est transformée en énergie acoustique par le biais d'une membrane, qui transmet la vibration à l'air environnant. La mise en vibration de la membrane va générer une onde acoustique à l'avant et à l'arrière du haut-parleur. L'air poussé par le haut-parleur est aspiré à l'arrière de celui-ci. C'est le phénomène du court-circuit acoustique. Ces mouvements d'air s'annulent mutuellement dans le champ proche et le rayonnement en champ lointain est quasiment nul. C'est pour cette raison que le haut-parleur est monté sur une enceinte acoustique, qui va permettre d'empêcher la propagation de l'onde arrière.

Une barre de son est une enceinte allongée selon une direction de l'espace, et sur laquelle sont montés plusieurs haut-parleurs *medium* ou *twitter*. On étudiera en particulier deux barres de son dans ce manuscrit, qui sont visibles dans l'Annexe A. Par rapport à une

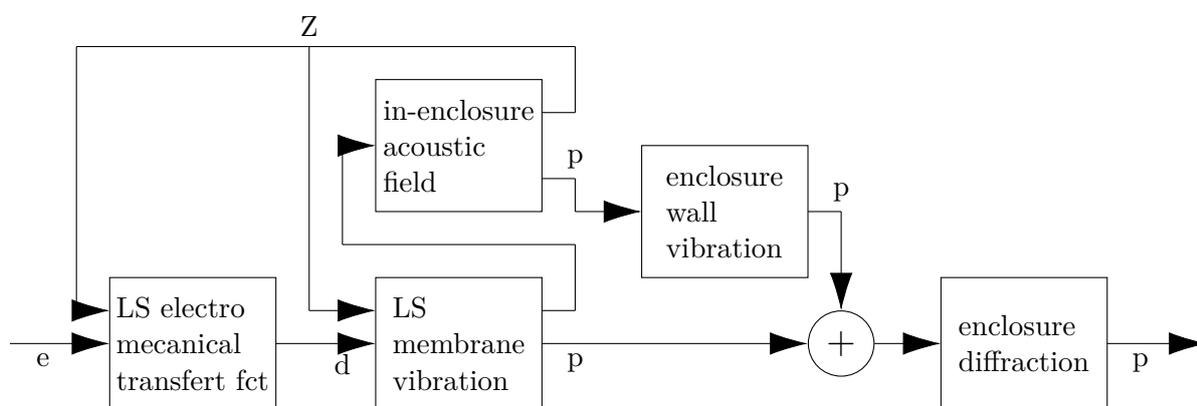


Figure I.1.1 – Description simplifiée des phénomènes physiques et leurs interactions, à l’œuvre dans une enceinte. LS est l’abréviation de *Loudspeaker*. La variable e représente la consigne électrique ; La variable d le déplacement de l’entrefer du haut-parleur ; La variable p le champ de pression généré par les différents phénomènes acoustiques. La boucle de rétroaction, issue de l’influence de la pression à l’intérieur de l’enceinte (i.e couplage), est représentée par une impédance Z . Celle-ci peut se mettre sous la forme électrique ou acoustique, selon si on considère la fonction de transfert électromécanique du haut-parleur, ou bien la vibration de sa membrane (voir [54, 64, 117] pour des exemples de modélisation).

enceinte classique, la multiplicité des haut-parleurs permet de retranscrire la dimension spatiale d'une scène sonore. C'est l'idée de contrôler la forme du rayonnement en combinant plusieurs petites unités [116]. Ce principe de superposition est couramment utilisé pour créer des sources omni-directionnelles en montant plusieurs haut-parleurs sur une enceinte polyédrique. Cependant, on se rend compte aujourd'hui que ces sources ne sont pas optimisées [76]. Pour mieux contrôler le rayonnement de tels systèmes, il est d'abord nécessaire de caractériser et de comprendre individuellement le rayonnement de chaque haut-parleur sur l'enceinte, pour ensuite les combiner correctement en fonction de leurs directivités. Le cas a été traité par Pasqual [99, 97, 98], lorsque l'enceinte est sphérique. Plus récemment, un travail similaire a été fait par Laitinen en utilisant une enceinte cubique [72]. Laitinen montre aussi comment ce *beamforming* permet d'induire des sensations de distance. D'une manière générale, la maîtrise de la directivité d'un système de reproduction sonore et d'enregistrement permet d'améliorer la qualité de reconstruction d'une scène sonore [70]. Il existe plusieurs méthodes pour reconstruire un champ acoustique à partir d'un système composé de plusieurs unités. La prise en compte de la directivité de ces unités permet une meilleure précision que lorsque ces unités sont assimilées à de sources ponctuelles, que ces unités soient à directivité fixe [104], où variable [103].

La caractérisation de la directivité d'un haut-parleur sur son enceinte est donc primordiale. Dans ce manuscrit, on cherche à comprendre de quelle manière la forme rectangulaire allongée d'une barre de son influence sa directivité. Pour cela, il est nécessaire, en premier lieu, de passer en revue tous les phénomènes physiques pouvant influencer le rayonnement d'un système de restitution sonore. On résume ces phénomènes et leurs interactions sur la Figure I.1.1, pour lesquels plus de détails seront donnés dans les sections suivantes.

1.2 Fonctionnement et modélisation d'un haut-parleur

Le schéma de fonctionnement d'un haut-parleur est donné à la Figure I.1.2. Un haut-parleur est basé sur l'utilisation de la force de Laplace. Cette force est la résultante de l'interaction du champ magnétique permanent, généré par l'aimant dans le noyau (ou entrefer), et du champ magnétique produit par une bobine, dont la mise en tension génère un courant électrique. La bobine va alors se déplacer selon l'axe du noyau. Elle entraîne avec elle une membrane qui va transmettre la vibration à l'air environnant. Un haut-parleur est un système électrodynamique qui peut-être modélisé par un circuit électrique équivalent, linéaire en première approximation. Les travaux de Small [126] sont précurseurs dans ce domaine. Ils restent encore aujourd'hui largement utilisés pour décrire un haut-parleur. Les recherches continuent aujourd'hui pour améliorer ces modèles (avec par exemple [51]). Notons que les non-linéarités d'un système de restitution sonore proviennent principalement du haut-parleur. On peut différencier deux grands types de non-linéarités [67] : Les non-linéarités "électriques", qui proviennent des grands déplacements de la bobine dans le champ magnétique de l'aimant, et les non-linéarités "mécaniques" qui viennent des grands déplacements des parties mobiles du haut-parleur (spider, suspensions ...). Il est possible de modéliser ces non-linéarités avec des modèles complexes (voir par exemple [106]). Dans ce manuscrit, l'étude de ces non-linéarités est hors de propos, mais pas ignorée pour autant. On utilisera un modèle de Hammerstein en parallèle pour séparer la partie linéaire de la partie non-linéaire dans nos mesures, sans ce soucier des origines de ces non-linéarités

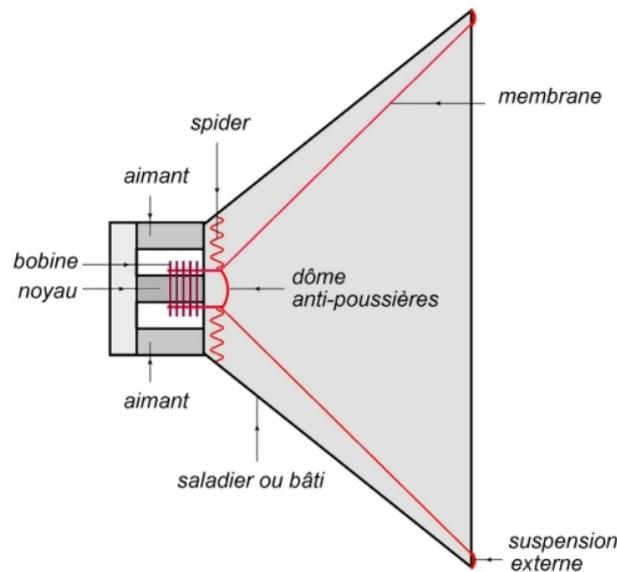


Figure I.1.2 – Schéma d'un haut-parleur. Les parties mobiles sont indiquées en rouge ^a.

^a. Par maxicours – <http://www.maxicours.com/se/fiche/5/9/398559.html>

[109]. On ne conservera que la partie linéaire. De même, le modèle électrodynamique du haut-parleur ne rentre pas dans notre étude et ne sera pas étudié. En effet, il n'a pas d'influence sur la directivité. Pour comparer les modèles et les mesures, on sera donc amené à faire une normalisation à chaque fréquence. Plus d'informations seront données dans la Sect. 2.

La membrane d'un haut-parleur a une influence sur la directivité d'un système de restitution sonore. Plus précisément, la diffraction du son par l'enceinte est fonction du type de source qui l'éclaire, et dépend donc de la directivité du haut-parleur. Celle-ci dépend de la rigidité de la membrane, ainsi que de sa forme. Sa contribution doit être prise en compte dans notre étude. Dans ce manuscrit, la membrane sera considérée comme rigide. C'est la très classique hypothèse du piston. Celle-ci est valide lorsque la fréquence n'est pas trop élevée, et cela malgré les non-linéarités qui proviennent de la déformation de la membrane [66].

Une façon simple d'étudier l'influence de la forme de la membrane passe par le modèle du piston bafflé, i.e un piston vibrant dans un mur infini. De cette manière, on peut résoudre l'équation de Helmholtz en séparant les variables et exprimer des solutions analytiques. Cette méthode ne peut pas s'appliquer si on considère un piston vibrant dans une enceinte rectangulaire, car il n'est pas possible de séparer les variables. En revanche, pour certaines formes d'enceintes particulières (sphérique, sphéroïdale ...), il est possible d'utiliser les systèmes de coordonnées associées à ces formes pour exprimer analytiquement les solutions (voir le chapitre 2 pour un exemple avec les coordonnées sphéroïdales et une revue bibliographique). L'étude du piston bafflé donne cependant un bon aperçu des propriétés de directivité d'un haut-parleur, et peut être utilisée telle quelle dans certains modèles de diffraction (voir chapitre 3).

Le modèle du piston bafflé a été largement étudié dans la littérature. Deux grands types de résultats nous intéressent : les études caractérisant l'influence de la forme de la membrane sur la directivité, ainsi que les méthodes qui permettent de faire ces calculs. De ce fait, il a été très vite montré que le calcul pour un piston circulaire à vitesse uniforme pouvait se réduire à une intégrale simple [30]. Le calcul peut aussi être fait avec des distributions de vitesse décrites par des fonctions polynomiales [46]. Il est également possible de faire une formulation analytique dans le domaine temporel [129]. On peut alors utiliser n'importe quel type de distribution de vitesse initiale, en la développant sur la base orthogonale associée au piston circulaire [128]. Une revue de littérature des outils mathématiques disponibles pour le modèle du piston plan est donnée par Harris en 1981 [48], dont le travail sur le piston bafflé est considérable. On peut accélérer les calculs en utilisant certaines techniques. Par exemple, Kirkup propose en 1994 [63] une méthode pour calculer rapidement l'intégrale de Rayleigh pour n'importe quelle forme de piston. Williams proposait déjà une astuce pour ce calcul en 1982, basée sur l'algorithme de la FFT [155]. De nombreux efforts ont aussi été faits pour développer la pression rayonnée par un piston plan sur les harmoniques sphériques. Ainsi, les premiers travaux sont faits par Hasegawa [49], pour faciliter le calcul de la diffraction du son émis par un piston sur une sphère rigide. D'autres travaux suivront pour exploiter ou rendre exploitables les relations d'Hasegawa [158, 80].

Tous ces outils permettent aussi d'étudier le cas des pistons non-plans, i.e qui possèdent une certaine forme. Dans le cadre d'une application aux haut-parleurs, Frankfort propose en 1975, dans son doctorat, une étude détaillée de l'influence de la forme en cône de la membrane sur le son et la directivité. En allant plus loin, on peut étudier l'influence du dôme sur le rayonnement [134], puis comment le son de la membrane vient se diffracter sur le dôme [133]. Il existe aussi des solutions pour des pistons non-circulaires. L'impédance d'un piston rectangulaire est donnée par Lee [73]. Emeterio [39] en donne la pression émise, et propose une analyse de la complexité apportée par la forme rectangulaire, comparée à une forme circulaire. Tous ces travaux ouvrent la porte à des applications plus exotiques aujourd'hui, comme par exemple, le contrôle du rayonnement d'un piston en le séparant en anneaux concentriques, pour lesquels la vitesse et la phase sont contrôlées séparément [85] ; l'étude de pistons aux profils très complexes [106], ou encore l'optimisation de pistons rectangulaires pour maximiser le rayonnement [53].

Ce manuscrit s'intéresse à l'influence de l'enceinte sur la directivité, et non du haut-parleur sur la directivité. On considérera donc le haut-parleur avec le modèle simple du piston rigide, ou du monopole. En effet, le modèle du piston plan circulaire à vitesse uniforme suffit pour décrire la directivité du haut-parleur, qui est de plus en plus resserrée avec l'élévation de la fréquence. Cependant, ce modèle est insuffisant lorsque le premier mode de la membrane du haut-parleur apparaît, en haute fréquence. Il est courant d'utiliser l'approximation du piston plan pour modéliser un cône flexible jusqu'à une fréquence d'environ $f = \frac{1.4c}{\pi d}$, avec d le diamètre du piston et c la vitesse du son¹. On doit donc rester en dessous de cette fréquence pour que nos modèles soient valides. De plus, au dessus de cette fréquence, le haut-parleur émet peu de son dans les directions latérales. Cela se montre facilement grâce au théorème de la phase stationnaire, souvent utilisé

1. Voir par exemple https://www.klippel.de/fileadmin/klippel/Files/Know_How/Literature/Papers/KLIPPEL_Sound_Radiation_Poster.pdf

dans l'étude du piston baffé. Cette méthode permet de calculer facilement l'interaction de sources monopolaires réparties sur la surface du piston. Le haut-parleur sur l'enceinte se comporte alors comme un piston dans un mur infini et la forme de l'enceinte n'a plus d'importance. Cette affirmation sera rediscutée dans le chapitre 3.

D'après la formule précédente, la fréquence associée à un haut-parleur de 5 cm de diamètre est de 3 kHz. Nous utiliserons cette limite haute dans ce manuscrit, étant donné le diamètre des haut-parleurs étudiés (voir Annexe A).

1.3 Influence et modélisation du champ acoustique interne

La raison d'être d'une enceinte acoustique, est d'empêcher l'onde arrière émise par le haut-parleur d'interagir avec l'onde avant. La structure d'une enceinte est montrée Figure I.1.3. L'arrière du haut-parleur crée alors un champ acoustique à l'intérieur de l'enceinte, dont les interactions avec les autres mécanismes sont montrées sur la Figure I.1.1.

Ce champ acoustique peut faire rentrer en vibration les parois de l'enceinte, qui vont alors se mettre à rayonner. Peu de littérature existe sur le sujet. Des études récentes montrent que, dans certains cas, le phénomène n'est pas négligeable [12], en particulier pour des formes d'enceinte inhabituelles [41]. Souvent, il nécessite d'utiliser des méthodes complexes pour être correctement calculé [93]. Sa prise en compte est absolument nécessaire lorsque l'enceinte est petite ou fine. C'est le cas pour les systèmes embarqués ou smartphones [163]. Ce n'est pas le cas pour les barres de son, au centre de notre étude. On négligera donc ce phénomène.

Le champ acoustique interne peut aussi avoir un effet non négligeable sur le mouvement de la membrane. Ce champ acoustique confiné dans l'enceinte se comporte pour la membrane comme une charge acoustique. Il a été étudié en premier lieu au moyen d'éléments finis [54]. Il a aussi une influence sur la partie électrique du haut-parleur, pour laquelle il se comporte comme une impédance électrique [117]. Ces impédances dépendent principalement des modes acoustiques de la cavité et peuvent être étudiées avec différentes techniques [64]. Il est aussi possible, avec différentes méthodes numériques, d'étudier simultanément l'influence du champ interne sur le haut-parleur et la mise en vibration des parois de l'enceinte [55]. Dans le cadre de notre étude, on reste dans la plage fréquentielle pour laquelle le haut-parleur a un comportement de piston rigide. Ces impédances se traduiront comme un simple gain n'affectant pas la directivité, et leurs études sont donc hors de propos. Comme pour le gain apporté par la partie électrodynamique du haut-parleur, on pourra l'ignorer par le biais d'une normalisation des mesures à chaque fréquence.

Pour limiter le champ acoustique interne, on peut recouvrir l'intérieur de l'enceinte à l'aide de matériaux acoustiquement absorbants. Il est aussi possible de réutiliser le champ acoustique à l'intérieur de l'enceinte, créée par l'arrière du haut-parleur, par l'intermédiaire d'un évent. Ces deux dispositifs sont visibles sur la Figure I.1.3. Un évent est une ouverture de l'enceinte au moyen d'un renforcement de la paroi. Il permet de contrôler le trajet minimum que doit effectuer l'onde arrière pour atteindre l'extérieur. Lorsque la longueur du trajet est égale à la moitié de la longueur d'onde, l'onde arrière est à nouveau en phase avec l'onde avant. Un évent est donc accordé pour une certaine fréquence. On choisit généralement une fréquence basse, pour laquelle le haut-parleur possède un rayonnement peu efficace. C'est l'effet *bass-reflex*. Le rayonnement, pour des fréquences sous la fréquence

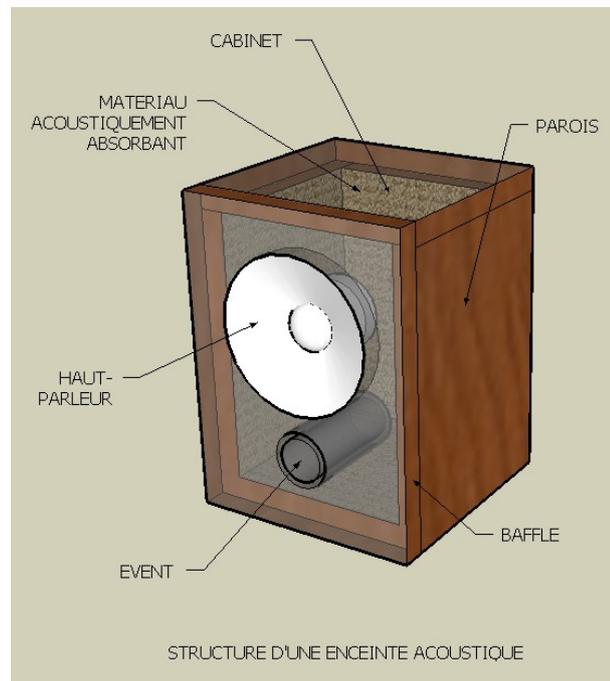


Figure I.1.3 – Structure d'une enceinte acoustique avec événement ^a

^a. Par Manotechnologie – Travail personnel, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14744393>

d'accord, a tendance à subir le phénomène de court-circuit acoustique. Ce n'est en revanche pas le cas pour les fréquences plus hautes, dont la longueur d'onde est plus petite que le trajet minimum. Il existe d'autres artifices pour réutiliser l'onde arrière, comme par exemple les haut-parleurs passifs. L'idée est alors d'ajouter une membrane simplement suspendue dans le cabinet, qui va être excitée par le champ acoustique à l'intérieur de l'enceinte.

Ce phénomène peut aussi se produire lorsque plusieurs haut-parleurs sont présents sur une même enceinte. On parle alors de phénomène de couplage. L'activation d'un haut-parleur excite un autre haut-parleur, avec lequel il partage la même cavité, par l'intermédiaire du champ acoustique interne à l'enceinte. Il n'y a pas d'évents, ni de haut-parleurs passifs sur les barres de son étudiées, mais elles comportent plusieurs haut-parleurs. Pour limiter le couplage, on utilise des cavités internes, comme celles visibles sur l'enceinte A (voir Annexe A). En revanche, l'enceinte B n'en possède pas. Dans ce cas là, l'influence du couplage sur la directivité ne peut pas être négligée. Il existe des modèles qui prennent en compte ce couplage, comme Montazeri par exemple, dans le cadre d'une annulation de bruit actif [89, 90]. Cependant, aucun modèle de couplage n'a été mis en œuvre dans cette thèse.

1.4 Modèle de la diffraction du son par l'enceinte

Le son émis par le haut-parleur, et éventuellement les parois de l'enceinte, est ensuite diffracté par celle-ci. Sa forme, et en particulier la forme du baffle, possède alors un rôle important dans la réponse en fréquence et la directivité du système de restitution sonore. C'est ce phénomène de diffraction qui est au centre de ce manuscrit.

Cet effet a été observé très tôt, de façon empirique, par Olson [96]. D'une manière générale, si on considère ses parois parfaitement rigides, l'enceinte est acoustiquement transparente en basse fréquence. La longueur d'onde est très grande devant les dimensions de l'enceinte, et l'ensemble se comporte comme un monopole. Le son est émis dans toutes les directions de l'espace. En revanche, lorsque la longueur d'onde est petite devant les dimensions du baffle, tout se passe comme si celui-ci était de taille infinie. En haute-fréquence, le son est donc émis au maximum dans la moitié de l'espace défini par le baffle. À un niveau d'excitation équivalent, le rayonnement dans l'axe du haut-parleur en haute-fréquence sera donc deux fois plus important que le rayonnement en basse-fréquence. C'est le phénomène de baffle, ou *baffle step response*. Ce facteur 2 est plus fréquemment exprimé comme un gain de 6 dB, et il est très connu des ingénieurs du son. Pour les fréquences intermédiaires, il se produit des effets d'interférence plus ou moins importants avec les ondes rampantes qui se propagent sur l'enceinte. Ce sont en particulier ces phénomènes que l'on cherche à caractériser dans ce manuscrit.

Pour calculer la diffraction du son par l'enceinte, le plus simple est de passer par un modèle numérique. Il en existe de nombreux pour l'acoustique (voir par exemple [118] pour une revue récente des méthodes numériques possibles en acoustique). La plus utilisée dans le cadre de la modélisation d'enceinte acoustique est la méthode des éléments finis de frontière, ou BEM pour *Boundary Element Method* [19]. Avec le développement de la puissance informatique, ces méthodes se sont démocratisées dans les années 90, permettant de faire des prédictions pour des cas complexes, jusqu'alors inaccessibles avec les modèles

analytiques [44]. La BEM est basée sur le théorème de flux-divergence (ou théorème de Green-Ostrogradski) qui permet de transformer une intégrale sur un volume en une intégrale sur une surface. Ce théorème, appliqué à l'équation des ondes, donne l'équation de Kirchoff-Helmholtz. Celle-ci exprime le rayonnement à l'intérieur ou à l'extérieur à une surface fermée, lorsque l'on connaît la pression et la vitesse acoustique sur cette surface. On peut ainsi mailler une surface fermée plutôt que tout l'espace. Le coût de calcul s'en voit fortement réduit. Notons que cette technique souffre du problème dit des fréquences irrégulières. Il y a une imprécision des prédictions lorsqu'on se situe aux fréquences de résonance de la cavité interne (virtuelle) formée par la surface fermée. De nombreuses solutions ont été développées pour pallier ce problème. Les deux plus connues sont la méthode de Burton et Miller, ainsi que la méthode CHIEF, mais il en existe d'autres plus efficaces [38, 10]. Le lecteur intéressé peut se référer au manuscrit de Visser [151] pour une très bonne revue des techniques BEM existantes pour l'acoustique. Dans ce manuscrit, on considère une implémentation d'un BEM très simple, sans correction des fréquences irrégulières, comme référence. Cette méthode et son implémentation sont décrites en détail dans la Sect. 3

Cependant, l'utilisation de modèles éléments finis reste coûteuse en terme de temps de calcul (en particulier pour les fréquences hautes) et ne permet pas d'interpréter physiquement les résultats obtenus. En conséquence, beaucoup d'efforts ont été faits pour trouver des méthodes alternatives, souvent basées sur des modèles de diffraction. En particulier, beaucoup d'hypothèses sur la diffraction sont valides si une enceinte est composée d'arêtes et de plans. Ainsi, Bews applique la théorie géométrique de la diffraction au rayonnement d'une enceinte cubique, en considérant ses arêtes comme un ensemble de sources secondaires [13]. Ce premier modèle est très critiqué par Vanderkooy qui propose quelques années plus tard son propre modèle de diffraction [149]. En 1997, Wright fait une revue des modèles de diffractions disponibles [159] en soulignant les contradictions des interprétations des différents auteurs, et mettant ainsi en évidence la difficulté d'interpréter correctement le rayonnement d'une enceinte. On peut ajouter à ces approximations le modèle DED (pour *Dipole Edge Diffraction*) d'Urban [145], encore très utilisé aujourd'hui pour sa rapidité mais peu précis, en particulier lorsque l'on est hors de l'axe du haut-parleur. Ces modèles restent peu satisfaisants pour prédire le rayonnement dans tout l'espace. Il existe aussi des travaux ne s'appuyant pas sur une modélisation de type sources secondaires sur arêtes. Par exemple, c'est le cas du modèle de Candy, qui s'appuie sur la méthode des solutions fondamentales [27]. Très récemment, Svensson a développé un modèle sans approximation, de la diffraction par un polyèdre convexe rigide [8] et qui semble prometteur pour une application aux enceintes acoustiques [161]. L'implémentation et l'interprétation de ce modèle sont effectuées dans le chapitre 3. Une bibliographie plus complète est également proposée dans ce chapitre.

Dans la suite de ce chapitre, on présente en détail les méthodes et les résultats obtenus afin de caractériser cette diffraction par la mesure tout d'abord, puis par un modèle éléments finis de surface simple ensuite. La méthode de comparaison de ces deux modèles de référence est explicitée.

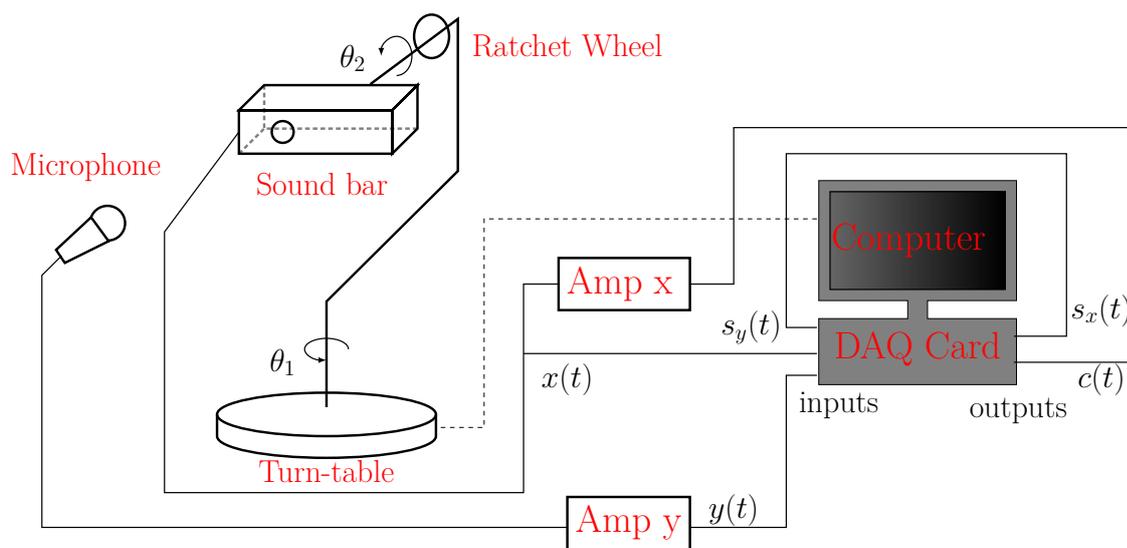


Figure I.2.1 – Description schématique du montage de mesure

2 Mesures

Dans cette partie, on décrit la mesure de la directivité des barres de son. La première section est dédiée au protocole, aux aspects pratiques et aux matériels utilisés. La seconde section est dédiée à la reconstruction de la partie linéaire de la réponse impulsionnelle de la barre de son. Enfin, la dernière section est dédiée au post-traitement numérique de cette réponse impulsionnelle.

2.1 Protocole de mesure

2.1.1 Matériel et montage

Description de la mesure et du montage

On souhaite caractériser le champ sonore émis par un haut-parleur monté sur une enceinte, dans toutes les directions de l'espace. Pour cela, on va estimer la réponse impulsionnelle pour différents points de l'espace. Ces derniers seront répartis sur une sphère virtuelle entourant l'enceinte. Plutôt que de modifier la position du microphone à chaque mesure en gardant l'enceinte fixe, on choisit de faire pivoter l'enceinte selon deux degrés de liberté, et de garder la position du microphone fixe.

Un schéma du montage de mesure est donné sur la Figure I.2.1. Un haut-parleur monté sur une enceinte est alimenté par une carte d'acquisition pilotée par un ordinateur, dont le signal est amplifié par un amplificateur audio. Le son émis est capturé par un microphone, dont le signal est amplifié lui aussi, avant de retourner dans la carte d'acquisition. L'enceinte est montée sur la table tournante par le biais d'une structure visible sur la Figure I.2.2. La table est pilotée par l'ordinateur, ce qui permet de contrôler la rotation θ_1 numériquement. La structure possède aussi une roue à cliquet, permettant de faire tourner manuellement la barre de son selon l'angle θ_2 . Le pilotage de la carte son et de la table se fait par l'intermédiaire du logiciel Matlab.

Matériel utilisé

L'ordinateur est une tour possédant 4Go de RAM, tournant sous Windows 7 avec Matlab 2016a. La carte d'acquisition est une National Instrument NI-USB 6211, utilisant les pilotes DAQmx. On utilise ses entrées et sorties analogiques, de type câble co-axial BNC. Les drivers audio sont ceux de Realtek.

Le microphone pré-polarisé à condensateur est de type Brüel et Kjær 4947. Il fonctionne avec un Nexus Conditioning Amplifier type Brüel et Kjær 2690 (noté Amp y sur la Figure I.2.1).

Les enceintes sont des prototypes provenant de chez Sonic Emotion Labs. Elles sont décrites dans l'Annexe A. Deux amplificateurs ont été utilisés pour amplifier le signal de consigne $c(t)$. L'amplificateur multi-canal MCA-8-I a été conçu par Mac-Mah et le CS-PA1Mk, grand public et moins onéreux, vient de chez Dynavox. Ils sont notés Amp x sur la Figure I.2.1.

La table tournante est une ET250-3D de chez OUTLINE, pilotée par le protocole UDP de la toolbox Matlab Control Instrument. La structure reliant l'enceinte et la table de mesure a été fabriquée au Laboratoire de mécanique des Solides (LMS) de l'Ecole polytechnique. Elle possède, en particulier, une roue à cliquet (un cliquet tous les 5°). Elle est visible sur la Figure I.2.2.

2.1.2 Protocole de mesure

Salle et Influence du bruit

La mesure est effectuée dans la salle Jean-Mandel du LMS. La salle ne dispose d'aucun traitement acoustique. L'isolement acoustique avec l'extérieur est assez mauvais, du fait des grandes fenêtres présentes sur toute la surface d'un mur de la salle, visibles sur le haut de la Figure I.2.2. Pour limiter l'influence du bruit extérieur, les mesures ont donc été faites la nuit. La salle possède une salle annexe, séparée par des panneaux de bois amovibles de 3 cm d'épaisseur. L'ordinateur et les deux amplificateurs ont été déportés dans cette salle pour limiter l'influence du bruit.

Le niveau sonore mesuré dans la salle lors des conditions de mesure se situe autour de 25 ± 5 dB(A).

On montre comment séparer le champ direct des réflexions de la salle dans la section Sect. 2.3.

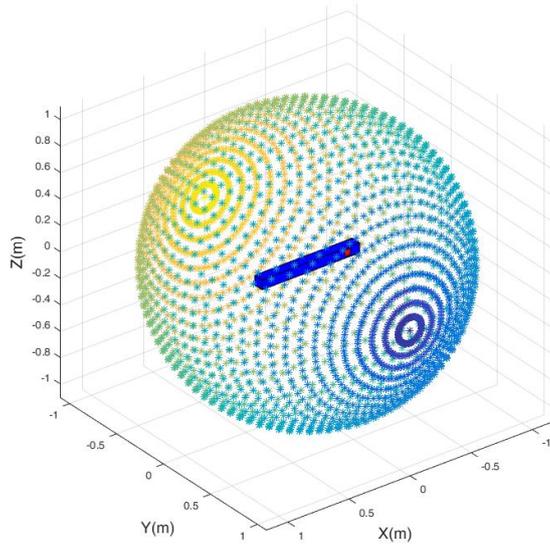
Synchronisation et cohérence des signaux mesurés

La carte NI6211 possède un seul Convertisseur Analogique Numérique (CAN) et un seul Convertisseur Numérique Analogique (CNA). L'acquisition et la génération des signaux analogiques s'effectuent par le biais de deux bus, qui sont traités par multiplexage. Ce protocole assure la synchronisation des signaux du bus d'entrée et des signaux du bus de sortie entre eux, mais pas la synchronisation entre le bus d'entrée et le bus de sortie. Les consignes de lancement d'acquisition et de début de génération des sorties s'effectuent par deux commandes différentes dans Matlab. Le temps d'exécution entre les deux commandes n'est pas constant et varie selon la charge de travail de l'ordinateur.



Figure I.2.2 – Partie du montage de mesure. Les angles θ_1 et θ_2 sont dans leurs positions d'origine. On peut voir le micro, la barre de son, la table tournante, ainsi que la structure avec la roue à cliquet sur laquelle est montée la barre. L'ampli, l'ordinateur et la carte d'acquisition sont déportés dans une autre pièce, pour limiter la pollution sonore. La salle n'est pas traitée acoustiquement.

Visualization of the Microphone position



Spherical coordinates

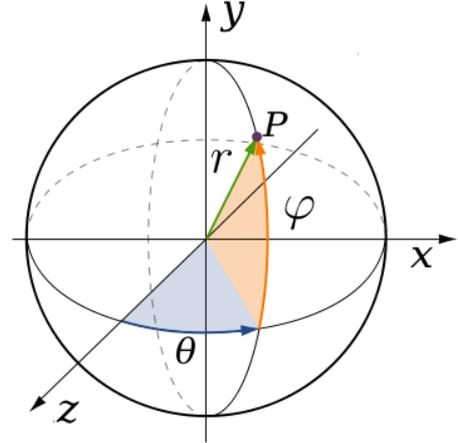


Figure I.2.3 – Figure de gauche : représentation de la position des points de mesures autour de l’enceinte A lors de la mesure. Dans ce cas précis, le micro est situé à 1.1 m. La répartition des points correspond aux coordonnées sphériques classiques lorsque l’angle d’élévation est défini par rapport à l’axe \vec{y} (voir figure de droite, où les axes n’ont pas la même orientation). Pour plus de visibilité, la couleur des points de mesure s’échelonne avec l’axe \vec{y} .

Pour palier ce problème, on génère un signal de synchronisation dans le bus de sortie, noté $s_x(t)$, qui est directement renvoyé dans le bus d’entrée. Il est alors noté $s_y(t)$. Ce signal est constitué de deux impulsions, situées avant et après la partie utile du signal de consigne $c(t)$. Ces impulsions sont facilement reconnaissables numériquement et nous permettent de créer une référence temporelle pour nos signaux. Additionnellement, on vérifie que le nombre d’échantillons entre les deux Dirac des deux signaux $s_x(t)$ et $s_y(t)$ sont bien identiques. De cette manière, on s’assure que la carte d’acquisition a bien récupéré l’intégralité des signaux. En effet, il arrive parfois que quelques échantillons se perdent lors de l’acquisition, ce qui a pour effet de décaler en phase l’estimation de la réponse impulsionnelle.

Nombre de points de mesure

Un cycle complet de mesures consiste à estimer la réponse impulsionnelle du système pour toutes les directions de l’espace. Pour cela, on fait varier l’angle θ_1 de 0° à 360° , et l’angle θ_2 de 0° à 180° . Dans la pratique, les angles sont discrétisés. On discrétise les deux angles avec un pas de 5° , soit un total de $72 \times 36 = 2592$ positions de l’espace pour mailler la sphère. La distribution des points de mesure obtenue est représentée sur la Figure I.2.3. Cette distribution n’est pas optimale, car la densité de points est beaucoup plus élevée en face et derrière l’enceinte que sur les côtés. Elle est cependant très facile à mettre en

œuvre, et a été retenue pour cette raison.

Les 72 positions relatives à l'angle θ_1 sont pilotées par l'ordinateur. En revanche, les 36 positions relatives à l'angle θ_2 sont accessibles par la roue à cliquet manuelle seulement. Lorsque les signaux d'excitations $c(t)$ durent 1 s, en prenant en compte le temps de rotation de la table tournante, ainsi qu'une seconde d'attente additionnelle pour que la structure supportant l'enceinte se stabilise après une rotation, il faut environ 7 min pour mesurer les 72 positions relatives à l'angle θ_1 . En comptant le temps de tourner la roue à cliquet, le temps total d'une mesure pour un haut-parleur est d'environ 5 h. Ce temps est suffisamment court pour considérer que la température varie peu, et donc que la vitesse du son est constante.

Passage des coordonnées de l'expérience vers les coordonnées sphériques

Pour passer des angles imposés par le protocole de mesure $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ et $\theta_2 \in [0, \pi]$, visibles sur la Figure I.2.1 vers les angles des coordonnées sphériques $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, visibles sur la Figure I.2.3, il faut faire la transformation suivante :

$$\begin{aligned} \varphi = & \begin{array}{ll} \pi/2 - \theta_1 & \text{si } \theta_1 \leq \pi \\ -3\pi/2 + \theta_1 & \text{si } \theta_1 \geq \pi \end{array} \\ \theta + \pi/2 = & \begin{array}{ll} \theta_2 & \text{si } \theta_1 \leq \pi \\ \pi + \theta_2 & \text{si } \theta_1 \geq \pi \end{array} \end{aligned} \quad (\text{I.2.1})$$

Remarquons que l'angle d'élévation doit être défini par rapport à l'axe \vec{y} plutôt que \vec{z} par rapport aux coordonnées sphériques classiques. Cela est dû à l'orientation de la table tournante et de la roue à cliquet (cf Figure I.2.3).

2.2 Identification d'un système de Hammerstein

Note : Dans cette partie, on utilisera l'abus de notation suivant : le produit de convolution entre deux fonctions a et b de t comme $a(t) * b(t)$ à la place de $a * b(t)$. Cela permettra d'alléger certaines notations.

2.2.1 Modèle de Hammerstein en parallèle avec un sinus glissant arbitraire en entrée (ASS)

Un modèle de Hammerstein en parallèle est un modèle simple, pertinent pour l'analyse des systèmes faiblement non-linéaires. En particulier, ce modèle est adapté aux systèmes physiques dont le comportement dynamique implique des non-linéaires "continues". Le modèle prend un seul signal en entrée et un seul en sortie, mais est souvent assimilé à un MIMO (*Multi-Input Multi-Output*) du fait de sa structure en parallèle. Il consiste en un polynôme de produit de convolution, dont les noyaux (équivalent des coefficients d'un polynôme classique) sont analogues à des réponses impulsionnelles. Ces noyaux décrivent les comportements linéaires et non-linéaires du système. En ce sens, il présente des similitudes avec le développement en série de Taylor. Une représentation de ce système de

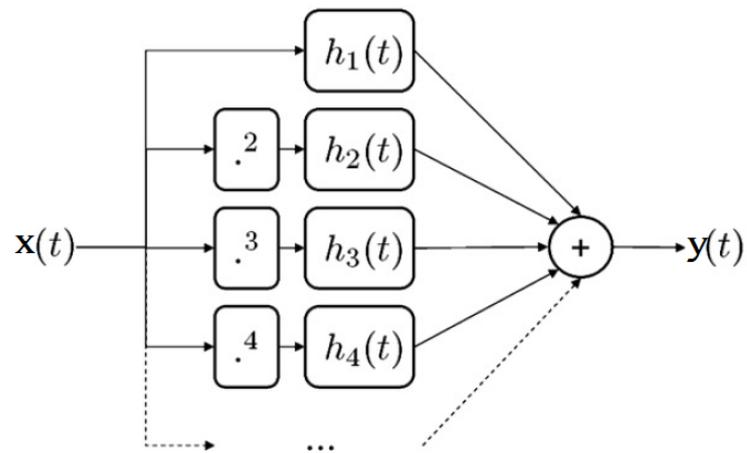


Figure I.2.4 – Représentation schématique d'un modèle de noyau de Hammerstein en parallèle.

type schéma bloc est donnée sur la Figure I.2.4. La relation entrée/sortie d'un tel système s'écrit :

$$y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t) * x^n(t) \quad (\text{I.2.2})$$

où x est l'entrée du système, y la sortie et h_n les noyaux du modèle. Plus le système est non-linéaire, plus les ordres élevés sont importants pour modéliser correctement le système. Ainsi, ce modèle est peu pratique pour modéliser les non-linéarités "discontinues" qui nécessiteraient un nombre de termes infini. Considérons un sinus glissant arbitraire (ASS) en entrée x d'un modèle de Hammerstein en parallèle tronqué à l'ordre N . On a $x(t) = \sin[\varphi(t)]$ avec $\varphi(t)$ une fonction du temps strictement croissante. En utilisant les relations trigonométriques, on peut écrire :

$$y(t) = \sum_{n=1}^N h_n(t) * \sin^n[\varphi(t)] = \sum_{n=1}^N h_n(t) * \sum_{m=1}^n A_{mn} \sin[m\varphi(t)] = \sum_{n=1}^N g_n(t) * \sin[n\varphi(t)] \quad (\text{I.2.3})$$

où $g_n(t) = \sum_{m=1}^n A_{mn} h_m(t)$ est une combinaison linéaire des fonctions $h_m(t)$ avec $m \leq n$.

$\sin[n\varphi(t)]$ sont les fonctions harmoniques associées au signal d'entrée $\sin[\varphi(t)]$. Cette formulation fait clairement ressortir les composantes harmoniques g_n qui apparaissent lors de la mesure d'un système faiblement non-linéaire, et qui sont différentes des noyaux h_n du modèle de Hammerstein. Un exemple de mesure avec le haut-parleur est donné dans [40]. Notons aussi que les termes A_{mn} peuvent être vus comme les termes d'une matrice \mathbf{A} .

2.2.2 Identification par la méthode du sinus glissant exponentiel (ESS)

L'identification d'un modèle de Hammerstein en parallèle consiste à estimer les noyaux $h_n(t)$ en mesurant une réponse $y(t)$ à une entrée connue $x(t)$. Considérons l'entrée $x(t)$ comme un sinus glissant exponentiel (ESS) de durée T , avec une fréquence de départ f_1 et une fréquence d'arrivée f_2 . Sa fréquence instantanée $f(t) = \varphi'(t)/2\pi$ peut alors s'écrire :

$$2\pi f(t) = \varphi'(t) = 2\pi f_1 \exp\left[\frac{t}{T} \ln(f_2/f_1)\right] \quad (\text{I.2.4})$$

En intégrant cette formule, on obtient l'expression de la phase φ :

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{f_1 T}{\ln(f_2/f_1)} \exp\left[\frac{t}{T} \ln(f_2/f_1)\right] + C \quad (\text{I.2.5})$$

où C une constante.

Nous allons montrer que la relation suivante :

$$\sin[n\varphi(t)] = \sin[\varphi(t + \Delta_{t_n})] \quad (\text{I.2.6})$$

simplifie considérablement l'identification des noyaux $h_n(t)$. Cette Eq. (I.2.6) est appelée "Fundamental phase property" par Rébillat [109] ou "Synchronized sine sweep" par Novak

[95]. Elle se vérifie lorsque le sinus glissant en entrée a un caractère exponentiel, sous certaines conditions qui seront discutées dans la Sect. 2.2.3. En faisant l'hypothèse que cette relation est juste, et en considérant les Eqs. (I.2.5) et (I.2.3), on obtient la relation suivante :

$$y(t) = \sum_{n=1}^N g_n(t) * \sin[\varphi(t + \Delta_{t_n})] = \sum_{n=1}^N g_n(t) * x(t + \Delta_{t_n}) \quad (\text{I.2.7})$$

On peut alors calculer la déconvolution du signal de sortie par le signal d'entrée. Cette déconvolution donnerait la réponse impulsionnelle si le système était linéaire. Ici, elle prend la forme d'une combinaison des composantes harmoniques g_n décalées temporellement. En la notant $r(t)$, on obtient :

$$r(t) = y(t) * x_{-1}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t - \Delta_{t_n}) \quad (\text{I.2.8})$$

avec $x_{-1}(t)$ défini tel que : $x(t) * x_{-1}(t) = \delta_0(t)$, où δ_0 est la distribution de Dirac. Cette déconvolution, et en particulier le calcul de x_{-1} , est cruciale pour la méthode ESS. On trouve principalement deux variantes différentes dans la littérature pour ce calcul (voir Sect. 2.2.3).

On remarque, en regardant l'Eq. (I.2.8), que lors du calcul de $r(t)$, les composantes harmoniques $g_n(t)$, combinaisons linéaires des noyaux de Hammerstein $h_m(t)$, $m < n$ du système sont bien localisées dans le temps et en avance d'une valeur Δ_{t_n} grâce à l'Eq. (I.2.6). Cela justifie notamment l'intérêt de cette propriété. Il est alors possible d'isoler les termes $g_n(t)$ avec une simple opération de fenêtrage temporel. On peut ensuite remonter aux noyaux $h_n(t)$ en inversant le système linéaire représenté par la matrice $\mathbf{A} = (A_{mn})_{1 \leq m, n \leq N}$. L'identification des noyaux se fait dans le domaine temporel.

Remarquons aussi que, en accord avec l'implémentation de cette méthode, la durée T_{cut} de la fenêtre temporelle utilisée pour extraire les noyaux $g_n(t)$ doit être plus petite que $T \frac{\ln((n+1)/n)}{\ln(f_2/f_1)}$. En conséquence, la quantité de bruit venant perturber l'estimation est relative à cette durée T_{cut} , et le choix de la longueur de cette fenêtre n'est pas anodin. Cette composante de l'analyse est souvent négligée dans la littérature. Cette fenêtre temporelle est généralement une fenêtre de Hanning, pour éviter les effets de bords dus à l'utilisation d'une transformée de Fourier.

Une nouvelle méthode d'identification, basée sur la méthode de Welch, a été développée lors de cette thèse. Cette méthode a la particularité de faire l'identification des harmoniques g_n dans le domaine fréquentiel à la place du domaine temporel. En conséquence, elle fonctionne avec n'importe quel sinus glissant (ASS) en entrée, i.e l'équation Eq. (I.2.6) n'est pas nécessaire. Le coût de calcul est en revanche plus important. Un article décrivant cette nouvelle méthode est disponible en annexe. Cet article analyse aussi de manière plus détaillée l'influence de la durée T_{cut} sur le bruit.

2.2.3 Différences entre les deux méthodes ESS de Novak et Rébillat.

Dans la littérature, on distingue deux méthodes souvent citées qui sont basées sur l'ESS. La première est celle de Novak [94, 95] et la seconde est celle de Rébillat [109]. Le

cadre de travail défini dans la section précédente nous permet de décrire facilement les différences et points communs de ces deux méthodes. La solution que l'on a retenue dans ce manuscrit sera donnée dans la section suivante.

Première différence : Le signal d'excitation

Pour examiner les conséquences de l'Eq. (I.2.6) sur un ESS, calculons $k\varphi(t)$:

$$n\varphi(t) = 2\pi \frac{f_1 T}{\ln f_2/f_1} \exp\left(\left[t + \frac{T \ln n}{\ln f_2/f_1}\right] \frac{\ln f_2/f_1}{T}\right) + nC = \varphi\left(t + \frac{T \ln n}{\ln f_2/f_1}\right) + nC \quad (\text{I.2.9})$$

L'Eq. (I.2.6) est donc vraie si on a :

$$n\varphi(t) = \varphi(t + \Delta_n) + 2\pi l \quad \text{avec } l \text{ un entier} \quad (\text{I.2.10})$$

Il suffit ensuite de choisir $\Delta_n = \frac{T \ln k}{\ln f_2/f_1}$ et de prendre C comme un multiple de 2π pour complètement satisfaire cette condition. De cette manière, aucune contrainte additionnelle n'est nécessaire sur la durée de l'ESS. C'est la solution proposée par Novak, dans [95]. Comme il le souligne dans cet article, il peut être intéressant de contraindre la fonction de phase $\varphi(t)$ à être un multiple de 2π au début ($t = 0$) et à la fin ($t = T$) du signal d'excitation pour éviter les discontinuités. En effet, une discontinuité exciterait toutes les fréquences du système, à la manière d'une impulsion. Pour cela, on peut imposer aux quantités $f_1 T / \ln(f_2/f_1)$ et $f_2 T / \ln(f_2/f_1)$ d'être entières. Cette condition est appelée *Novak Condition* dans la littérature. Dans la pratique, l'implémentation utilise souvent un "fade in" et un "fade ou" au début et à la fin du signal pour éviter toute excitation du système, ce qui rend ces contraintes inutiles.

Dans le cas de la méthode de Rebillat [109], le raisonnement est fait en partant d'une forme d'excitation qui utilise la fonction cosinus. Cette solution fait référence à celle proposée par Farina qui peut être exprimée par :

$$x_{\text{bis}}(t) = \cos(\varphi_{\text{bis}}(t)) = \cos\left(2\pi \frac{f_1 T}{\ln f_2/f_1} \left(\exp\left(\frac{t}{T} \ln f_2/f_1\right) - 1\right) - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{I.2.11})$$

Premièrement, il est important de remarquer que cette formulation contient déjà la condition $x(0) = 0$ en ajoutant à la phase $\varphi_{\text{bis}}(t)$ le terme -1 et $-\pi/2$, en comparaison avec la phase de φ donnée par l'Eq. (I.2.5). En d'autres termes, avec cette formulation, la contrainte C est déjà fixée et vaut :

$$C_{\text{bis}} = -2\pi \frac{f_1 T}{\ln f_2/f_1} - \frac{\pi}{2} \quad (\text{I.2.12})$$

De cette façon, il est nécessaire de contraindre la durée T pour satisfaire l'Eq. (I.2.10). Il est alors facile de montrer que T ne peut prendre ses valeurs que dans un ensemble discret, donné par Rébillat [109]. Cette condition est l'équivalent de la *Novak Condition* et les mêmes remarques s'appliquent.

Deuxièmement, on note que l'utilisation de la fonction cosinus va changer la forme de la matrice \mathbf{A} dans l'Eq. (I.2.3). Ainsi, l'inversion proposée par Novak et celle proposée

par Rébillat ne sont pas les mêmes et leurs démonstrations se basent sur des concepts différents. Il est en revanche facile de passer de l'une à l'autre. On utilise pour cela la transformation linéaire suivante :

$$\mathbf{A}_{\text{Novak}} = \mathbf{B}\mathbf{A}_{\text{Rébillat}} \quad (\text{I.2.13})$$

avec \mathbf{B} une matrice diagonale dont les termes s'expriment par :

$$B_n = e^{-i\pi n/2}, 0 \leq n \leq N \quad (\text{I.2.14})$$

Finalement, les différences entre la méthode de Rébillat et celle de Novak ne sont pas fondamentales, et n'affectent pas l'identification obtenue par ces deux méthodes. Elles consistent essentiellement en des choix arbitraires différents. Remarquons que, contrairement à ce qui est affirmé dans [95], le sinus glissant proposé par Rébillat est bien synchrone, puisque l'Eq. (I.2.6) est respectée. En revanche il est déjà précontraint en 0, ce qui impose une contrainte sur la durée T . En ce sens, la définition de Rébillat est moins flexible que celle de Novak.

Deuxième différence : Le calcul du signal inverse x_{-1} .

Le calcul de la fonction x_{-1} est en fait l'unique réelle différence entre les deux méthodes. Rébillat utilise une simple inversion dans le domaine de Fourier, et ajoute ensuite de l'énergie dans le signal d'entrée dans ses fréquences inexcitées. De cette manière, il évite les erreurs dues à la division par 0. Novak utilise une technique astucieuse pour trouver la forme analytique de la fonction x_{-1} . Comme il le dit, cela permet d'avoir une estimation correcte de $g_n(t)$ à des fréquences plus hautes que la solution proposée par Rébillat. En effet, si l'ESS en entrée a une fréquence de départ f_1 et une fréquence d'arrivée f_2 , alors la composante d'ordre n sera excitée pour des fréquences allant de nf_1 à nf_2 . La version analytique de x_1 permet une déconvolution valide jusqu'à la fréquence nf_2 pour la composante d'ordre n , alors que celle de Rébillat est limitée à la fréquence f_2 pour toutes les composantes. Cependant, comme chaque g_n est une combinaison linéaire des noyaux h_m , $m < n$, l'estimation finale de la partie linéaire sera, quoiqu'il arrive, ramenée au rang $[Nf_1, f_2]$. Les estimations des noyaux d'ordres supérieurs, elles, seront effectivement valides à plus hautes fréquences.

Nos tests montrent que les deux méthodes donnent des résultats pratiquement identiques sur le rang de fréquence $[Nf_1, f_2]$ (erreur inférieure à 1% avec nos paramètres).

2.2.4 Méthode utilisée

Dans ce manuscrit, nous avons adopté une combinaison des deux méthodes pour exploiter au mieux les avantages et inconvénients de celles-ci.

Pour le signal d'excitation, nous utilisons la formulation de Novak en sinus, ce qui nous permet d'avoir le minimum de contraintes sur notre signal d'entrée. On utilise une demi-fenêtre de hanning sur 64 points pour lisser le signal au début et à la fin. On utilise donc la matrice donnée par Novak pour inverser le système linéaire qui permet de passer des harmoniques g vers les noyaux h .

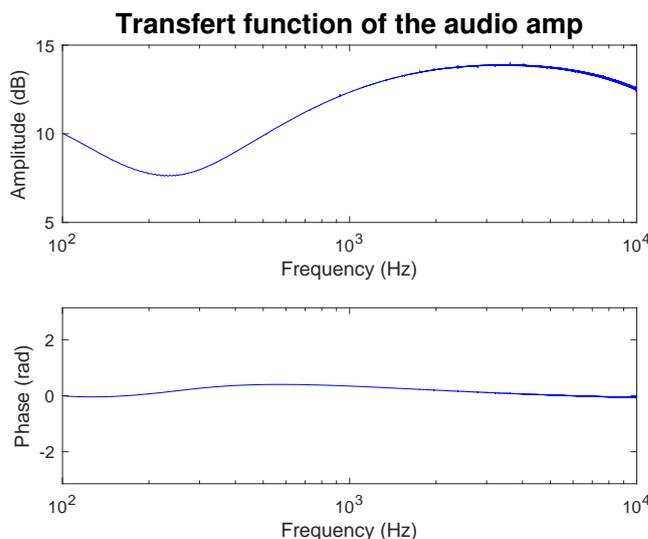


Figure I.2.5 – Fonction de transfert de l’ampli Dynavox sur l’intervalle de fréquences [100 Hz 10 kHz]. L’amplitude varie sur une plage d’environ 5 dB et la phase sur une plage d’environ 15° .

Pour le calcul de x^{-1} , on utilisera la méthode de Rébillat plutôt que celle de Novak. On peut alors utiliser la sortie de l’ampli audio en tant que signal d’entrée pour le calcul du noyau, notée x sur la Figure I.2.1, plutôt que la consigne, noté c sur la Figure I.2.1. En effet, la fonction de transfert de l’ampli n’est pas plate, cf Figure I.2.5. En utilisant le vrai signal d’entrée, on supprime une partie du gain de l’amplificateur. On espère ainsi avoir une meilleure estimation de la partie linéaire du système. Le fait que l’entrée ne soit plus exactement un ESS peut mener à une moins bonne estimation de la partie non-linéaire, avec notamment un étalage temporel des noyaux un peu plus grand autour des positions attendues, i.e un biais dans la phase d’un point de vue du domaine fréquentiel. Cependant, on s’intéresse uniquement à la partie linéaire dans ce manuscrit.

On montre dans la Figure I.2.6 un exemple de l’estimation d’un modèle de Hammerstein en parallèle pour notre système. Dans cette exemple, on considère le haut-parleur numéro 2 sur l’enceinte A. Le micro est situé à 1.1 m du centre de l’enceinte avec $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = 0$ (le haut-parleur est à une distance de $1.1 \text{ m} + 0.3 \text{ m} = 1.4 \text{ m}$ du micro). Le micro et l’enceinte sont à une hauteur de 2 m par rapport au sol. L’amplificateur utilisé est le Dynavox (voir Sect. 2.1.1). La fréquence d’échantillonnage est de 48 kHz. On analyse le système jusqu’à l’ordre 5 avec un sinus glissant en fréquence allant de 100 Hz jusqu’à 10 kHz sur 1 s, soit un intervalle de travail allant de 500 Hz à 10 kHz. Les résultats sont montrés dans le plan fréquentiel. L’origine des amplitudes est arbitraire.

On constate que les noyaux sont estimées à quelques dizaines de décibels plus bas que la partie linéaire. Cependant, le noyau d’ordre m est excité par une amplitude à la puissance m par rapport à la partie linéaire, ce qui pourrait rendre les non-linéarités non-négligeables. On a cependant vérifié que la reconstruction temporelle des g_n était aussi très faible pour notre niveau d’excitation maximum lors des mesures. Les haut-parleurs étudiés sont donc faiblement non-linéaires aux amplitudes que l’on considère, ce qui nous conforte dans notre choix d’étudier uniquement la partie linéaire de notre système.

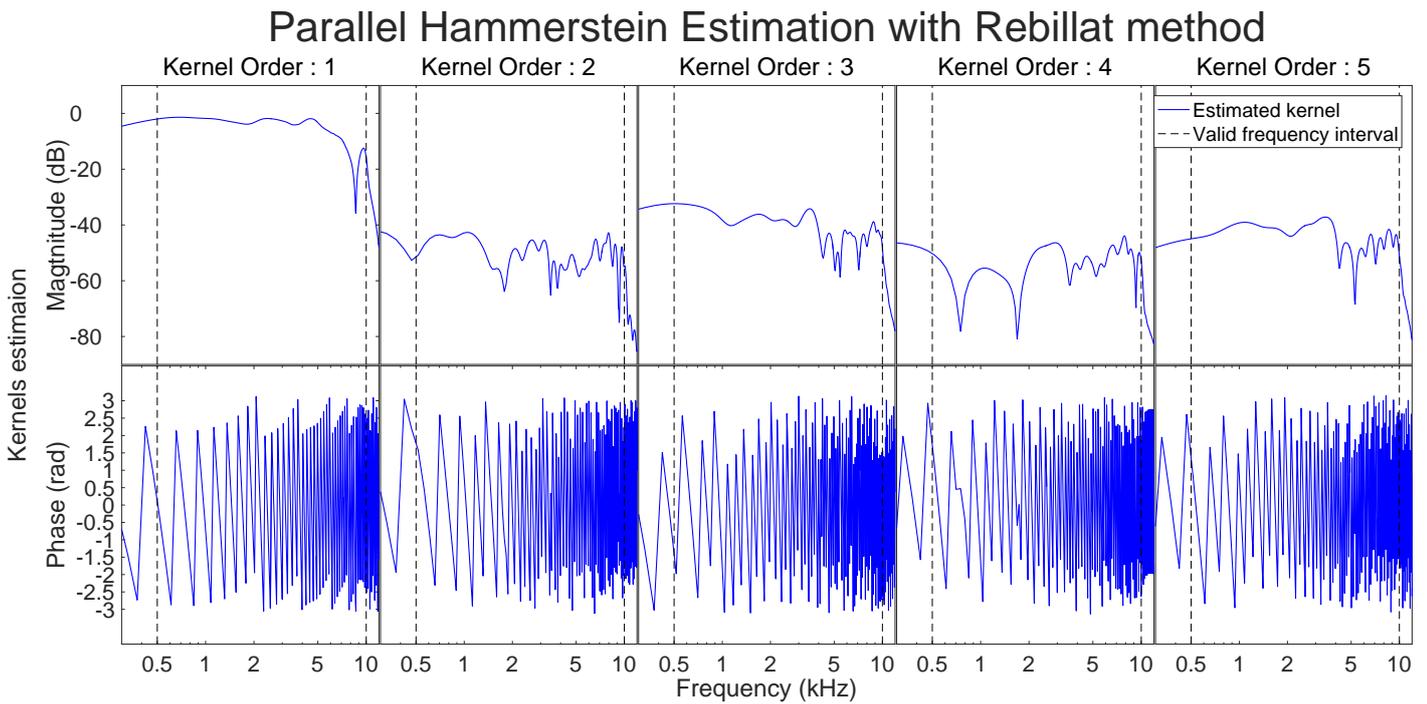


Figure I.2.6 – Exemple d’une estimation des noyaux de Hammerstein dans le domaine fréquentiel pour notre système avec la méthode utilisée. L’axe des amplitudes a une origine arbitraire. On constate que les noyaux d’ordre supérieur à 1 (représentant non-linéarités) se trouvent à plusieurs dizaines de dB en dessous de la partie linéaire. Pour nos niveaux d’excitation, on constate que la partie linéaire est dominante sur la partie non-linéaire.

2.3 Post-traitement

La dernière étape pour obtenir une bonne estimation de la partie linéaire de la réponse impulsionnelle linéaire consiste à retirer l'influence de la salle, ainsi que les effets de bords dus aux découpes dans le domaine temporel. En effet, la transformée de Fourier d'une fonction "porte" étant un sinus cardinal, une découpe trop abrupte dans le domaine temporel aurait pour conséquence de convoluer la réponse en fréquence dans le domaine fréquentiel par ce sinus cardinal.

Un exemple de l'estimation du noyau de Hammerstein d'ordre 1 dans le domaine temporel, i.e la réponse impulsionnelle de la partie linéaire, avant et après le post-traitement, est visible sur la Figure I.2.7. Cet exemple est le même que le précédent, dont l'estimation est visible sur la Figure I.2.6. La ligne noire pointillée représente l'origine où est attendue la réponse impulsionnelle, i.e $t = 0$. Remarquons que celle-ci a été périodisée pour tenir compte du caractère cyclique de l'algorithme FFT. On constate que le décalage est de 200 échantillons entre le pic de la réponse impulsionnelle et la position $t = 0$. Or, la distance entre le micro et l'enceinte est de 1.4 m, soit 197 échantillons pour une fréquence d'échantillonnage de 48 kHz et une vitesse du son de 340 m s^{-1} . Les deux valeurs sont donc cohérentes. De même, le décalage temporel entre la réponse impulsionnelle et la première réflexion du sol est de 593 échantillons pour une valeur attendue d'environ 598 échantillons.

On choisit de conserver les réponses impulsionnelles avec une longueur de 1024 échantillons (en rouge sur la Figure I.2.7). Cette valeur permet, pour toutes les combinaisons des angles θ_1 et θ_2 , de conserver la réponse impulsionnelle et de retirer la première réflexion venant du sol.

L'interprétation de la réponse impulsionnelle brute permet une découpe en trois parties. Avant le pic principal, on trouve des oscillations très régulières. La réponse d'un haut-parleur étant causale, il ne devrait pas y avoir de signal avant le pic d'arrivée. Ces oscillations sont interprétées comme un artefact dû à une reconstruction imparfaite. En effet, le produit de convolution est en théorie à support temporel infini, mais dans la pratique on est limité par la taille de nos signaux temporels. Notre déconvolution numérique est donc à support temporel fini, ce qui engendre ces oscillations, souvent appelées "effets de bords". Également, on note un décalage en phase de l'ampli audio. Or, notre méthode d'estimation est basée sur une hypothèse d'un sinus exponentiel parfait en entrée, ce qui n'est pas le cas dans la pratique puisque le signal d'entrée utilisé est celui sortant de l'ampli. Cette imperfection du signal d'entrée peut aussi engendrer une partie de ces oscillations. Notons que l'utilisation du noyau analytique de Novak donne les mêmes oscillations.

Après le pic principal, se trouve la suite de la réponse impulsionnelle. On estime que cette partie est composée d'environ 70 échantillons, avant l'apparition d'un signal ayant une forme différente.

En effet, après la réponse impulsionnelle, on distingue un signal composé de basses fréquences et de très hautes fréquences. On aperçoit une large oscillation qui s'étale sur environ 300 échantillons, ponctuée de petites oscillations, dont la période moyenne est de 5 échantillons. Cela correspond à des fréquences respectives d'environ 160 Hz et 9600 Hz, qui font partis des fréquences excitées. Or, un haut-parleur est un système causal, qui suit les relations de Kramer-Koenig. Celles-ci affirment que la réponse impulsionnelle d'un tel système est celle à minimum de phase, c'est-à-dire la plus compacte possible dans le domaine temporel. Comme un haut-parleur est un système amorti et asservi, ses

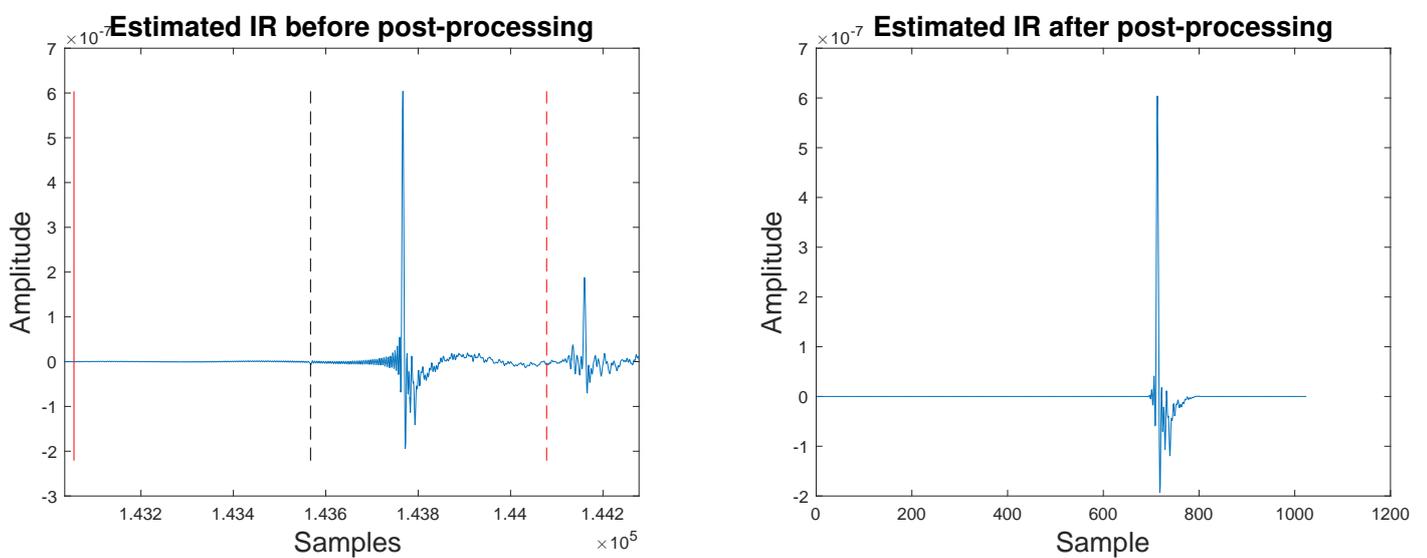


Figure I.2.7 – Estimation de la réponse impulsionnelle avant, puis après le post-traitement. Sur la figure de gauche, la ligne pointillée noire représente la position attendue du noyau d’Hammerstein d’ordre 1. Le décalage correspond au temps de propagation du son entre le haut-parleur et l’enceinte. Les lignes rouges représentent l’intervalle de découpe retenu. On peut clairement voir la première réflexion venant du sol un peu après l’intervalle.

composantes haute-fréquences n'ont aucune raison d'être décalées temporellement dans la réponse impulsionnelle. En effet, un haut-parleur ne peut pas continuer de résonner longtemps après avoir été excité en haute-fréquence, à cause des suspensions. En revanche, la structure en aluminium visible sur la Figure I.2.2 a tendance à résonner en haute-fréquence, ce qui se traduit par un étalement de ses composantes en haute-fréquence. En conséquence, les oscillations rapides sont attribuées à la structure. En revanche, les composantes basse-fréquences sont bien attribuées au haut-parleur, car elle ont besoin d'une plus longue période temporelle pour se manifester.

Cela nous amène à l'extraction suivante de la réponse impulsionnelle. On commence par repérer la position du pic principal dans Matlab. On choisit ensuite de garder 20 échantillons en amont, et 100 échantillons en aval du pic. Ces deux parties seront pondérées par des demi-fenêtres de Hanning de mêmes longueurs respectives (20 et 100 échantillons). Cela nous permet d'éviter l'effet de convolution par un sinus cardinal dans le domaine fréquentiel, dont les seconds lobes créent des artefacts lors de l'estimation. De cette manière, la longueur effective de la réponse impulsionnelle est de 120 échantillons, ce qui représente une longueur d'onde de fréquence 400 Hz. En pratique, il faut plutôt considérer une fréquence de 500 Hz au minimum due à l'atténuation des fenêtres de Hanning. Cette valeur est cohérente avec l'analyse du système de Hammerstein jusqu'à l'ordre 5 et un sinus glissant dont la fréquence de départ est $f_1 = 100$ Hz (voir Sect. 2.2.3).

Nos mesures seront précises en haute-fréquence et mais pas valides en dessous de 500 Hz. Cependant, le rayonnement en basse-fréquence est relativement bien connu (monopolaire) et facilement calculable avec précision par un modèle éléments finis. On se contentera donc de valider le modèle éléments finis avec les mesures dans le domaine de validité de celles-ci, puis nous garderons le modèle éléments finis en tant que référence pour les basses fréquences.

3 Éléments finis de frontière

3.1 Principe

3.1.1 Définition du problème

Soit p le champ scalaire représentant la pression acoustique. On cherche à résoudre l'équation de Helmholtz dans l'espace extérieur à l'enceinte, défini ici comme une surface fermée S , lorsqu'une portion S_0 de cette surface (le haut-parleur) vibre à une vitesse v_0 donnée et à une fréquence ω . Une illustration de ce problème est donnée sur la Figure I.3.1. Un point appartenant à la surface S est noté \vec{y} , tandis qu'un point extérieur à la surface est noté \vec{x} . On a le problème suivant :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (\text{I.3.1})$$

et

$$\langle \vec{v}(\vec{y}), \vec{n}_y \rangle = \frac{1}{\rho j \omega} \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} = \begin{cases} v_0(\eta, \varphi) & \text{si } (\eta, \varphi) \in S_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.3.2})$$

où \vec{v} la vitesse acoustique définie par la relation d'Euler linéarisée, avec la convention $e^{-j\omega t}$:

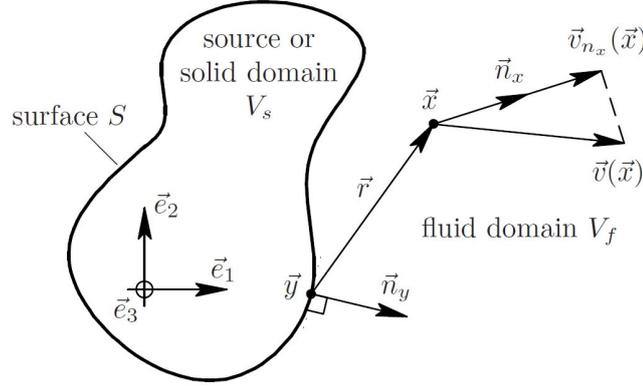


Figure I.3.1 – Schéma d'un problème de Helmholtz extérieur. D'après [151]

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho j\omega \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} p \quad (\text{I.3.3})$$

On ajoute également la condition de Sommerfeld, classiquement exprimée dans les coordonnées sphériques comme suit :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right) \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} - jk\hat{p} \right) \right] = 0 \quad (\text{I.3.4})$$

où $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde, c est la vitesse du son, et ρ est la masse volumique du milieu de propagation V_f .

On est donc face à un problème de propagation acoustique extérieure à une surface donnée, sur laquelle on impose une condition de Neumann (condition de vitesse).

3.1.2 Représentation intégrale

Pour résoudre ce problème, on considère sa représentation intégrale. Cette formulation repose sur la fonction de Green. Celle-ci est définie comme étant la solution G de l'équation suivante :

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{y}) + k^2 G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x}, \vec{y}) \quad (\text{I.3.5})$$

pour \vec{y} et \vec{x} deux vecteurs positions donnés de l'espace. Ici $\delta(\vec{x}, \vec{y})$ représente la distribution de Dirac 3D. Si on considère un domaine 3D infini non borné, on a :

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (\text{I.3.6})$$

avec $r = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Remarquons que la forme de la fonction de Green change avec l'espace considéré. Par exemple, si on considère un demi-espace 3D infini borné par un plan, si un seul point \vec{x} ou \vec{y} appartient à ce plan, alors la fonction de Green possède une expression simple et vaut le double du second membre de l'Eq. (I.3.6). Si les deux points sont extérieurs au plan, l'expression est beaucoup plus complexe.

En multipliant l'Eq. (I.3.1) par G et en ajoutant membre à membre l'Eq. (I.3.5) multipliée par p , puis en intégrant sur la surface S , on obtient la troisième identité de Green ou représentation intégrale du problème :

$$\alpha(\vec{x})p(\vec{x}) = \iint_{\vec{y} \in S} \left\{ G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} - \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} p(\vec{y}) \right\} dS \quad (\text{I.3.7})$$

où $\frac{\partial f(r)}{\partial n_y}$ désigne la dérivée partielle de la fonction $f(r)$ au point \vec{y} , dans la direction du vecteur normal \vec{n}_y . C'est donc le produit scalaire du gradient de la fonction f pris au point \vec{y} et de la normale \vec{n}_y .

Le coefficient $\alpha(\vec{x})$ de l'Eq. (I.3.7) prend les valeurs :

$$\alpha(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{x} \in V_s \\ 1/2 & \text{si } \vec{x} \in S \text{ et } \vec{n}_y \text{ est unique} \\ 1 & \text{si } \vec{x} \in V_f \end{cases} \quad (\text{I.3.8})$$

Si la normale \vec{n}_y n'est pas unique, i.e lorsque le point est sur une arête ou un coin, et dans le cas du problème extérieur, la valeur de α peut être évaluée avec l'intégrale :

$$\alpha(\vec{x}) = 1 + \frac{1}{4\pi} \iint_{\vec{y} \in S} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right) dS \quad (\text{I.3.9})$$

Cette intégrale peut être interprétée comme l'angle solide du milieu V_f autour de V_s lorsqu'on est au point $\vec{x} \in S$, normalisé par 4π [122]. Cette interprétation peut être étendue à $\alpha(\vec{x})$, qui représente la proportion angulaire du milieu V_f autour du point \vec{x} . De cette manière, il vaut 0 lorsqu'il est dans V_s , 1 lorsqu'il est dans V_f , et 1/2 lorsqu'il est sur la surface de V_s et que celle-ci est régulière.

Remarque 1 : Cette représentation est valide pour n'importe quelle surface fermée S dans un espace infini. Faire coïncider cette surface et celle de l'enceinte permet de connaître par hypothèse (condition de Neuman) la dérivée de la pression par rapport à la normale à la surface dans le deuxième membre de l'Eq. (I.3.7).

3.1.3 Principe de résolution

À partir de l'Eq. (I.3.7), on peut résoudre le problème en deux étapes.

L'examen de cette équation nous montre que seule la pression sur la surface $p(\vec{y})$ est inconnue dans le membre de droite. En effet, le champ de vitesse est donné par hypothèse du problème (condition de Neuman). Pour estimer cette quantité, on considère la limite de l'Eq. (I.3.7), lorsque $\vec{x} = \vec{x}_S \in S$ (et que celle-ci est régulière). On obtient alors :

$$\frac{1}{2}p(\vec{x}_S) = \iint_{\vec{y} \in S} \left\{ G(\vec{x}_S, \vec{y}) \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} - \frac{\partial G(\vec{x}_S, \vec{y})}{\partial n_y} p(\vec{y}) \right\} dS \quad (\text{I.3.10})$$

En séparant l'intégrale par linéarité, on peut ré-écrire cette équation avec des opérateurs linéaires tel que :

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}\right)p(\vec{x}_S) = \mathcal{S} \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} \quad \forall \vec{x}_S \in S \quad (\text{I.3.11})$$

avec \mathcal{I} l'opérateur identité, et \mathcal{D} et \mathcal{S} les opérateurs définis tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathbb{L}^2(S) &\rightarrow \mathbb{L}^2(S) \\ p(\vec{x}_S) &\mapsto \mathcal{D}[p(\vec{x}_S)] = \iint_{\vec{y} \in S} \frac{\partial G(\vec{x}_S, \vec{y})}{\partial n_y} p(\vec{y}) dS \end{aligned} \quad (\text{I.3.12})$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathbb{L}^2(S) &\rightarrow \mathbb{L}^2(S) \\ p(\vec{x}_S) &\mapsto \mathcal{S}[p(\vec{x}_S)] = \iint_{\vec{y} \in S} G(\vec{x}_S, \vec{y}) p(\vec{y}) dS \end{aligned} \quad (\text{I.3.13})$$

Il suffit alors d'inverser numériquement l'opérateur linéaire $(\mathcal{I}/2 + \mathcal{D})$ pour obtenir une estimation du champ de pression sur la surface. C'est la première étape. Remarquons qu'une condition de Dirichlet nécessiterait d'inverser l'opérateur \mathcal{S} .

La seconde étape est l'application directe de l'Eq. (I.3.7). En effet, si on dispose d'une estimation du champ de pression sur la surface, ainsi que du champ de vitesse normale à celle-ci, alors la solution pour le champ de pression extérieur est donnée par une simple évaluation numérique de l'intégrale.

3.2 Calcul numérique

3.2.1 Discrétisation et fonction de forme

La résolution du problème n'est pas accessible analytiquement dans le cas général. En revanche, les opérateurs étant composés d'intégrales sur une surface fermée, il est facile de les exprimer dans un formalisme matriciel en discrétisant la surface. Le calcul et l'inversion deviennent simples, bien qu'approchés.

En premier lieu, la surface S est découpée en M éléments S_m , définis par des nœuds de coordonnées \vec{y}_i . Mathématiquement, on fait la substitution :

$$\iint_{\vec{y} \in S} \leftarrow \sum_{m=1}^M \iint_{\vec{y} \in S_m} \quad (\text{I.3.14})$$

Ces sous-surfaces sont toutes de même nature. En deux dimensions, on choisit généralement une forme triangulaire ou carrée. Des exemples de formes utilisables sont données sur la Figure I.3.3. La position d'un point quelconque de la surface sera interpolée depuis la position des nœuds \vec{y}_i de l'élément qui contient ce point. Cette discrétisation est donc une approximation de la surface réelle. Ceci est illustré sur la Figure I.3.2. On utilisera dans ce manuscrit l'élément QUAD8 uniquement. Notons qu'un même nœud \vec{y}_n peut appartenir à plusieurs éléments S_m . On utilisera donc la notation \vec{y}_n pour désigner un nœud de manière absolue et la notation \vec{y}_j pour désigner un des nœuds relatif à un élément en

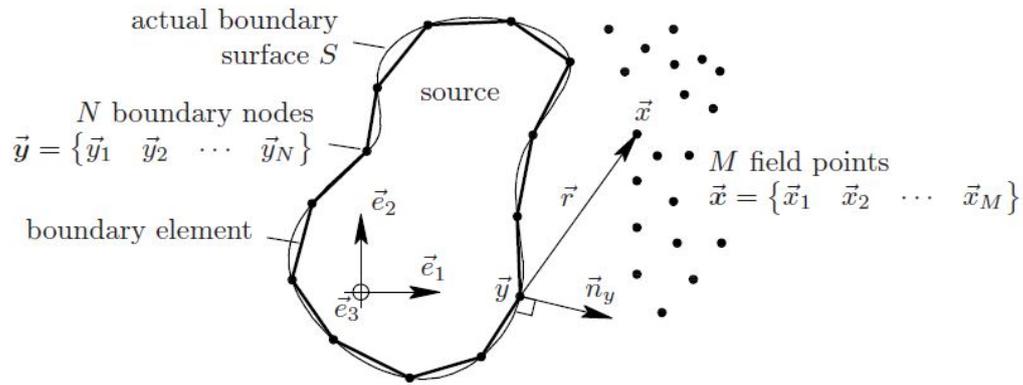


Figure I.3.2 – Représentation symbolique de la découpe d’une surface en éléments simples. D’après [151]

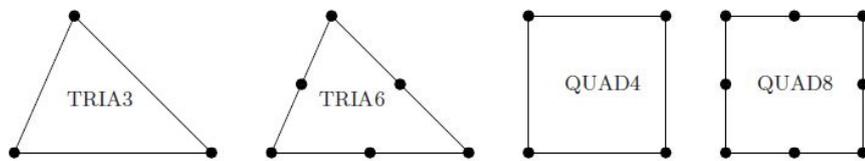


Figure I.3.3 – Exemples d’éléments 2D utilisables en BEM. D’après [151]

Table I.3.1 – Fonctions de formes utilisées pour l'élément QUAD8.

Nœuds	a_1	a_2	N
1	-1	-1	$(1 - a_1)(1 - a_2)(-1 - a_1 - a_2)/4$
2	1	-1	$(1 + a_1)(1 - a_2)(-1 + a_1 - a_2)/4$
3	1	1	$(1 + a_1)(1 + a_2)(-1 + a_1 + a_2)/4$
4	-1	1	$(1 - a_1)(1 + a_2)(-1 - a_1 + a_2)/4$
5	0	-1	$(1 - a_1^2)(1 - a_2)/2$
6	1	0	$(1 + a_1)(1 - a_2^2)/2$
7	0	1	$(1 - a_1^2)(1 + a_2)/2$
8	-1	0	$(1 - a_1)(1 - a_2^2)/2$

particulier (donc $1 \leq j \leq 8$ dans le cas d'élément QUAD8).

On souhaite calculer ces intégrales par la méthode de la quadrature de Gauss-Legendre. Cette méthode est définie uniquement pour une intégration sur un carré unitaire $[-1, 1]^2$. On appelle les variables de cet espace normalisé (a_1, a_2) . Cependant, nos éléments QUAD8 ne sont pas unitaires, et peuvent être déformés. On doit donc faire un changement de variable pour relier la position d'un point \vec{y} , appartenant à l'élément S_m , à ses coordonnées (a_1, a_2) . On choisit d'exprimer celui-ci comme suit :

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^8 N_j(a_1, a_2) \vec{y}_j^m + \varepsilon_m^y \quad (\text{I.3.15})$$

avec N_j la fonction de forme correspondant au nœud j de l'élément m , et ε l'erreur de position due à l'interpolation. Les fonctions de forme N_j sont définies localement dans l'élément m de telle sorte qu'elles valent 1 pour la position du nœud j et 0 aux autres nœuds. Elles sont données dans la Table I.3.1.

Le champ de pression sur la surface S et sa dérivée sont aussi exprimés avec des fonctions de forme. On a :

$$p(\vec{y}) = \sum_{j=1}^8 N_j(a_1, a_2) p_j + \varepsilon_m^a \quad (\text{I.3.16})$$

et

$$\frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} = \sum_{j=1}^8 N_j(a_1, a_2) \left(\frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} \right)_j + \varepsilon_m^b \quad (\text{I.3.17})$$

Ce faisant, on limite la forme possible des champs p et $\frac{\partial p}{\partial n_y}$ à une combinaison linéaire des fonctions de forme issues des différents éléments. D'une manière générale, ces développements sont des approximations des valeurs réelles des champs p et $\frac{\partial p}{\partial n_y}$, et l'erreur commise est notée ici ε_m^a . Cette erreur dépend, entre autres, du type et surtout de la taille de l'élément par rapport aux distributions réelles. En particulier, pour un certain nombre d'onde k , il faut un nombre suffisant d'éléments par longueur d'onde pour éviter le repliement spatial. On a gardé dans ce manuscrit une valeur de 10 éléments par longueur

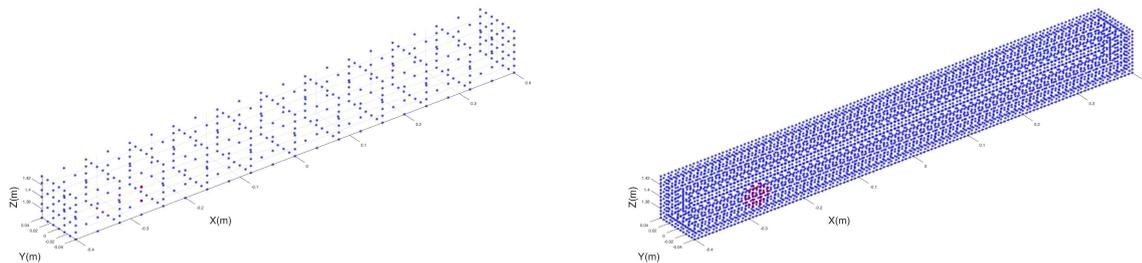


Figure I.3.4 – Deux exemples de maillages obtenus pour l’enceinte A avec des éléments QUAD8. La figure de gauche représente un maillage pour une fréquence basse, la figure de droite pour une fréquence haute. Les points bleus représentent les nœuds pour lesquels la vitesse normale est nulle ; les points rouges pour lesquels elle vaut 1.

d’onde. Le coût de calcul augmente donc avec la fréquence. Deux exemples de maillages de l’enceinte A en fonction de la fréquence sont donnés sur la Figure I.3.4.

3.2.2 Quadrature de Gauss-Legendre

La quadrature de Gauss-Legendre est une méthode d’approximation numérique d’une intégrale. Elle approxime cette dernière par une somme pondérée de poids w_i de l’intégrande f , prise en un certain nombre de points x_i du domaine. Elle est valide uniquement pour un intervalle $[-1, 1]$, et nécessite donc un changement de variable dans le cas général. Elle est exacte lorsque f est un polynôme de degré $2n - 1$ si l’on prend au moins n points. On écrit alors :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (\text{I.3.18})$$

Les valeurs de w_i et x_i sont calculées en fonction des polynômes de Legendre. On cherche à appliquer cette méthode pour le calcul des opérateurs des Eqs. (I.3.12) et (I.3.13). Pour un seul élément, ils sont de la forme :

$$A^m(\vec{x}_S) = \iint_{\vec{y} \in S_m} g(\vec{x}_S, \vec{y}) p(\vec{y}) dS \quad (\text{I.3.19})$$

avec g qui vaut G ou bien $\frac{\partial G}{\partial n_y}$. On utilise le changement de variable défini par les fonctions de forme de la section précédente et on obtient, en ignorant les erreurs ε :

$$A^m(\vec{x}_S) = \sum_{j=1}^8 p_j \iint_{[-1,1]^2} N_j(a_1, a_2) g(\vec{x}_S, \vec{y}(a_1, a_2)) J da_1 da_2 \quad (\text{I.3.20})$$

avec J le Jacobien relatif au changement de coordonnées, défini par :

$$J = \left\| \frac{\partial \vec{y}}{\partial a_1} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial a_2} \right\| \quad (\text{I.3.21})$$

où \times désigne le produit vectoriel.

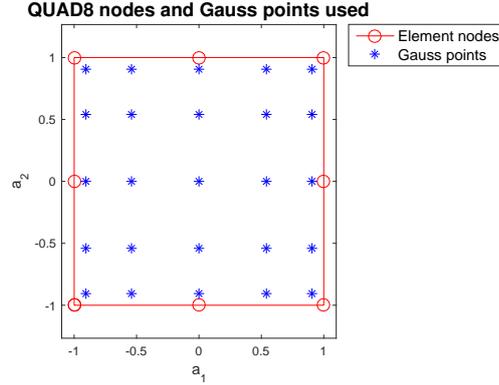


Figure I.3.5 – Représentation dans l’espace normalisé de l’élément simple QUAD8 ainsi que la position des points de Gauss-Legendre utilisés.

On utilise ensuite une quadrature d’ordre 5, dont la position des points x_i est montrée sur la Figure I.3.5. L’ordre 5 est suffisant, étant données les fonctions de forme que l’on utilise, voir Table I.3.1. On obtient alors pour l’élément m :

$$A^m(\vec{x}_S) = \sum_{j=1}^8 p_j \sum_{i=1}^{25} w_i J N_j(a_1^i, a_2^i) g(\vec{x}_S, \vec{y}(a_1^i, a_2^i)) \quad (\text{I.3.22})$$

La quantité $A^m(x_S)$ représente la façon dont l’opérateur considéré, au travers des nœuds \vec{y}_i de l’élément S_m , agit sur le point de la surface \vec{x}_S . Si on considère tous les éléments S_m , ainsi que tous les nœuds \vec{y}_n en lieu et place du point \vec{x}_S , on obtient une matrice de taille N^2 (N étant le nombre de nœuds sur la surface) qui caractérise complètement l’opérateur. On peut alors évaluer ou inverser.

Remarques :

- La matrice représentant les opérateurs est pleine, contrairement aux éléments finis classiques. En contrepartie, le nombre des éléments est beaucoup plus petit car seule la surface fermée est maillée.
- Si des nœuds sont situés sur les arêtes de l’enceinte, les points de Gauss, eux, n’y sont jamais. En conséquence, la normale à la surface est toujours unique et bien définie et il n’y a pas de problème d’intégration sur ces points-là. En particulier, il n’est pas nécessaire d’utiliser le dernier cas de l’Eq. (I.3.8), et l’hypothèse de surface régulière pour obtenir l’Eq. (I.3.10) tient.
- Dans l’Eq. (I.3.22), seule la fonction g dépend de \vec{x}_S dans le second membre. Par conséquent, il est possible, au préalable, de calculer une seule fois toutes les autres quantités qui seront valides pour tous les \vec{x}_S . Cette étape permet de gagner un temps de calcul considérable.
- Dans l’Eq. (I.3.20), lorsqu’on considère le cas où \vec{x}_S prend la valeur d’un nœud \vec{y}_i de l’élément considéré, l’intégrale devient singulière et la quadrature de Gauss n’est pas applicable en l’état. C’est le cas lorsque l’on doit examiner l’influence d’un élément S_m sur un de ses nœuds (voir interprétation de l’Eq. (I.3.22)). En effet, l’Eq. (I.3.6)

est singulière d'ordre 1 lorsque $\vec{x} = \vec{y}$, i.e $r = 0$. Pour ces cas là, on sépare l'élément QUAD8 en sous-éléments triangulaires. On applique ensuite un changement de variable additionnel basé sur la transformée de Duffy pour transformer ces triangles en carrés, et ainsi pouvoir appliquer la méthode de quadrature de Gauss. Ce changement de variable a la particularité d'avoir son Jacobien proportionnel à r , ce qui a pour effet de supprimer la singularité. Le lecteur intéressé pourra se référer à [118] pour plus de précisions.

4 Résultats

Dans cette section, on compare les résultats obtenus par les mesures et par les éléments finis. On considère l'enceinte A et l'enceinte B uniquement, l'enceinte C sera étudiée dans le chapitre 3. Chaque sous-section détaille la méthode permettant d'obtenir les figures, puis décrit objectivement les résultats, pour enfin les interpréter. Ces outils seront ré-utilisés dans les chapitres suivants.

4.1 Directivité horizontale

4.1.1 Méthode de visualisation

Pour comparer le rayonnement mesuré et le rayonnement prédit, le plus simple est de confronter directement l'amplitude prédite et mesurée aux différentes positions des microphones à différentes fréquences. On pourrait aussi comparer les phases de la même façon, mais l'interprétation de la phase d'une directivité est difficile. On se limite donc au cas de l'amplitude. On compare les directivités dans un plan car, dans un motif 3D, cela n'est pas facilement visualisable. On se limitera au plan contenant le grand axe de la barre de son et tous les centres des haut-parleurs. C'est le seul plan contenant tous le centre des haut-parleurs, ce qui permet de tracer le même diagramme en considérant chaque source individuellement, ce qui facilite la comparaison. C'est aussi un des deux plans de symétrie de l'enceinte. On appelle arbitrairement ce plan : le plan horizontal. Les mesures dans ce plan sont obtenues pour une rotation complète de l'angle θ_1 sur la Figure I.2.1, lorsque l'angle θ_2 se trouve dans sa position d'origine (voir Figure I.2.2). Pour l'interprétation, on fait l'hypothèse (vérifiée empiriquement) que si le modèle éléments finis est capable de prédire correctement le rayonnement dans ce plan, il est aussi capable de le prédire correctement dans toutes les directions de l'espace.

Afin de visualiser ces directivités avec la même grille de micro pour différents haut-parleurs, on utilise la méthode de visualisation décrite dans l'Annexe B. Le modèle éléments finis ne comportant pas de modèle électrodynamique de haut-parleur, la comparaison nécessite une normalisation des directivités par leurs valeurs maximales à chaque fréquence f . On désigne l'ensemble des positions du microphone localisées sur une sphère S_{obs} , centrée sur la barre de son par $\mathbf{R}_{(\text{obs}, \theta, \varphi)}$, dans le repère sphérique (voir la Figure I.2.3 et l'Eq. (I.2.1) pour la correspondance entre les angles).

On trace alors la quantité :

$$B(r_{\text{obs}}, \theta_1, f) = 20 \log_{10} \frac{p(r_{\text{obs}}, \theta \in \{0, \pi\}, \varphi \in [-\pi/2, \pi/2], f)}{\max_{\varphi} p(r_{\text{obs}}, \theta \in \{0, \pi\}, \varphi, f)} \quad (\text{dB}) \quad (\text{I.4.1})$$

Note : lorsque θ_1 parcourt l'intervalle $[0, 2\pi]$, cela correspond à l'union des deux intervalles obtenus lorsque φ parcourt $[0, \pi]$ et que θ vaut alternativement 0 et π , d'où le choix de notation ci-dessus.

4.1.2 Observation

Les résultats pour les haut-parleurs 1 et 2 des enceintes A et B sont visibles sur les Figures I.4.1, I.4.2, I.4.3 et I.4.4. Le paramètre r_{obs} vaut 1.1 m.

On constate que pour les deux haut-parleurs de l'enceinte A, les différences entre les directivités prédites et mesurées sont très faibles. Elles sont inférieures à 1 dB en moyenne, avec des erreurs locales montant à 3 dB.

Pour l'enceinte B, les résultats sont moins bons, avec plus d'écart entre les deux directivités. On retrouve pour les deux haut-parleurs une divergence du champ arrière en basse fréquence (voir la fréquence 493 Hz pour les deux haut-parleurs). Ces différences semblent se manifester sous forme d'oscillations spatiales, dont la fréquence angulaire augmente avec la fréquence considérée. L'erreur entre prédiction et mesure est plus importante pour le HP1.

4.1.3 Discussion et Interprétation

Validité du modèle BEM

Comme visibles sur les Figures I.4.1 et I.4.2, pour l'enceinte A, les différences entre BEM et mesures sont très faibles. Un modèle d'enceinte rigide avec un piston circulaire à vitesse normale constante comme haut-parleur est donc bien suffisant pour prévoir la directivité des barres de son étudiées. Sur la gamme de fréquences considérée ici ($[500 \text{ Hz}, 3 \text{ kHz}]$, i.e l'intervalle fréquentiel principal de l'audition humaine), seule compte la forme de l'enceinte. On explique les plus grosses différences entre prédictions et mesures pour l'enceinte B principalement par le couplage des haut-parleurs (voir sous-section suivante).

Les différences restantes peuvent être dues aux imprécisions de la mesure, aux défauts de construction ou aux effets de diffraction du système de mesure. Il serait possible d'étudier plus en détail l'origine de ces différences, mais la précision que l'on obtient par le modèle éléments finis est déjà suffisante pour nos applications.

Comme le modèle BEM nous permet de calculer facilement le rayonnement dans tout l'espace en décrivant uniquement la géométrie de l'enceinte, il sera utilisé comme référence par la suite de la thèse.

Influence du couplage des haut-parleurs

On constate que les prédictions pour l'enceinte B sont moins bonnes que pour l'enceinte A. Ces différences s'expliquent par l'absence de cavité interne limitant le couplage des haut-parleurs dans l'enceinte B. Un autre phénomène qui modifie le rayonnement de l'enceinte B est la présence du radiateur passif à l'arrière de l'enceinte, visible dans l'Annexe A. En effet, en basse-fréquence, le rayonnement d'un objet rigide est sensé être d'autant plus omni-directionnel que celui-ci est petit. Or, l'inverse est constaté à 500 Hz sur les Figures I.4.3 et I.4.4, par rapport aux Figures I.4.1 et I.4.2 de l'enceinte A. Cette absence d'omnidirectionnalité est interprétée comme la conséquence des interférences des sons émis

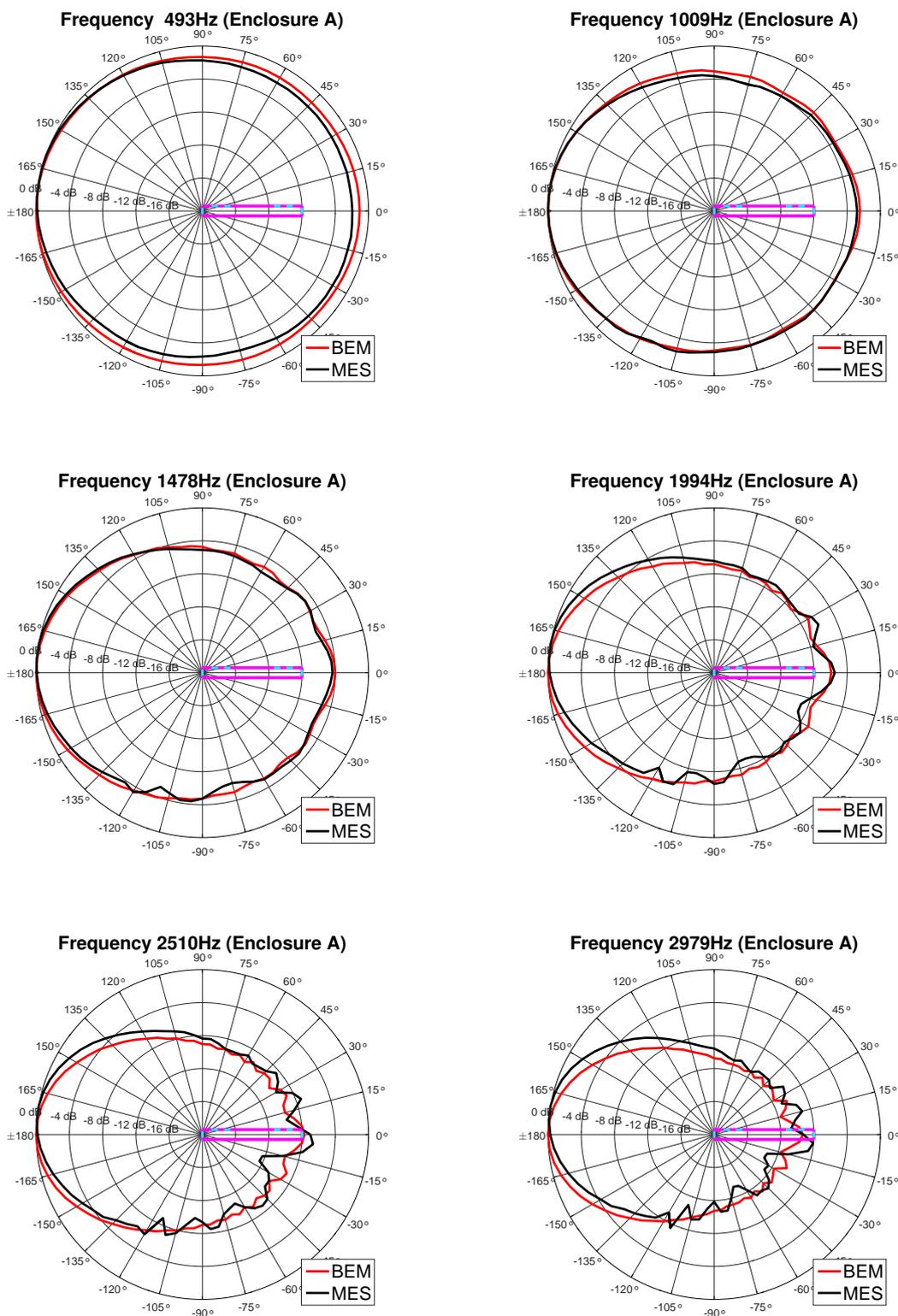


Figure I.4.1 – Directivités horizontales mesurées (bleu) et calculées par le BEM (rouge) dans le cas HP1 (extrémal) de l’enceinte A pour 6 fréquences différentes. Le tracé est effectué pour des capteurs situés à 1.1m, en cercle autour de l’enceinte (dont la position dans l’espace est représentée en magenta) en utilisant la méthode de visualisation décrite dans Annexe B.

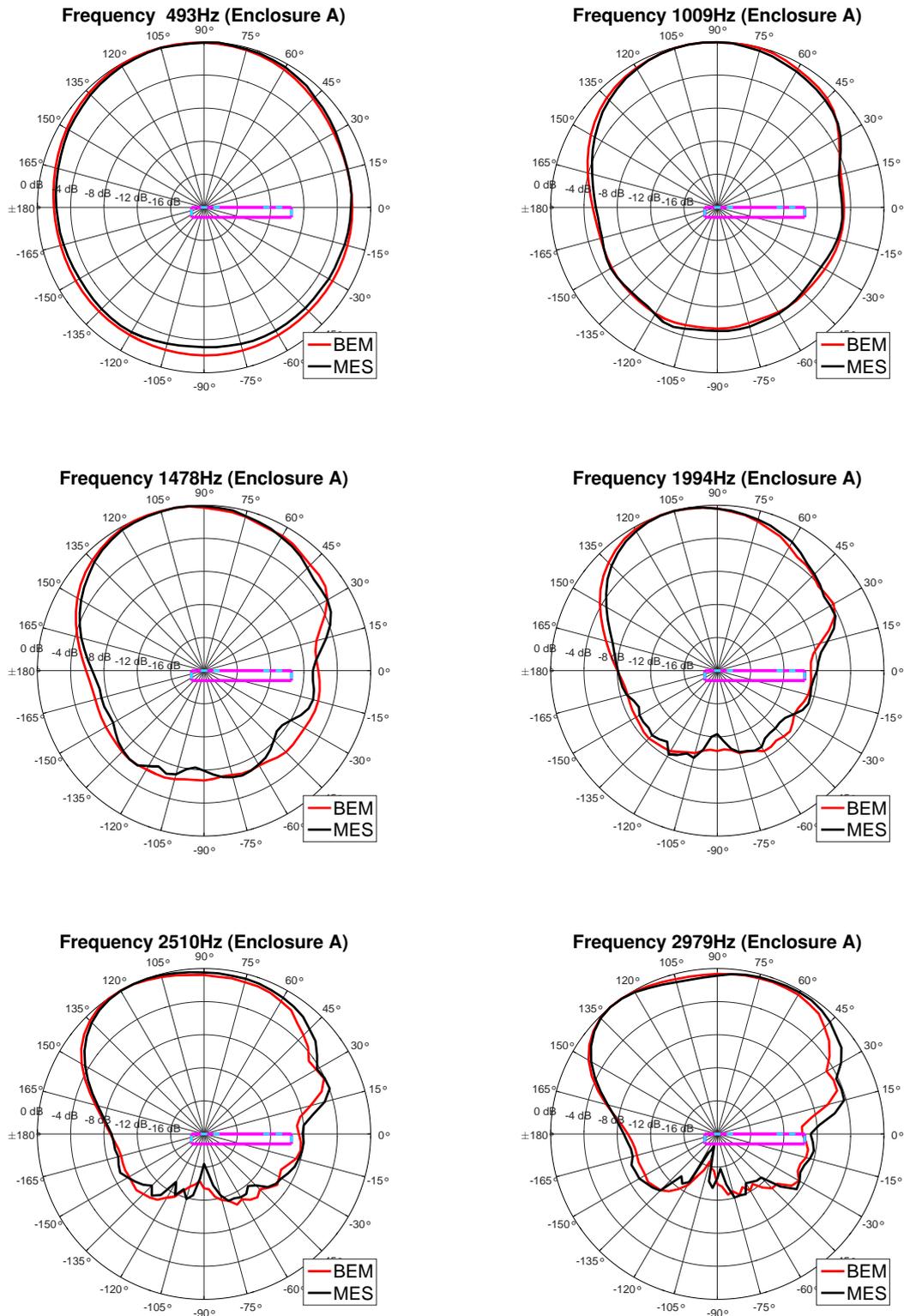


Figure I.4.2 – Directivités horizontales mesurées (bleu) et calculées par le BEM (rouge) dans le cas du HP2 (latéral) de l'enceinte A pour 6 fréquences différentes. Le tracé est effectué pour des capteurs situés à 1.1 m, en cercle autour de l'enceinte (dont la position dans l'espace est représentée en magenta) en utilisant la méthode de visualisation décrite dans Annexe B.

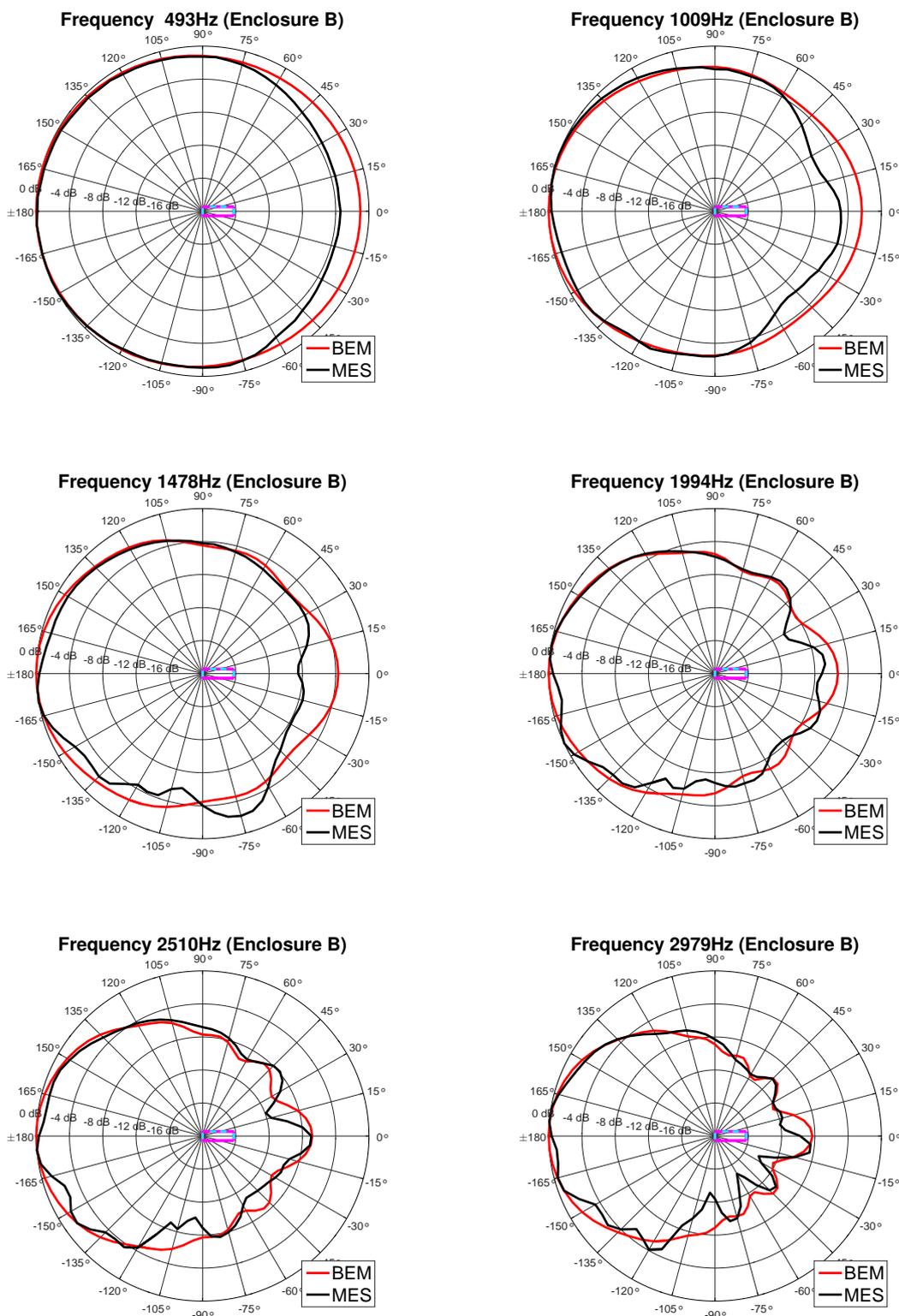


Figure I.4.3 – Directivités horizontales mesurées (bleu) et calculées par le BEM (rouge) dans le cas HP1 (extrémal) de l'enceinte B pour 6 fréquences différentes. Le tracé est effectué pour des receveurs situés à 1.1m, en cercle autour de l'enceinte (dont la position dans l'espace est représentée en magenta) en utilisant la méthode de visualisation décrite dans l'annexe Annexe B.

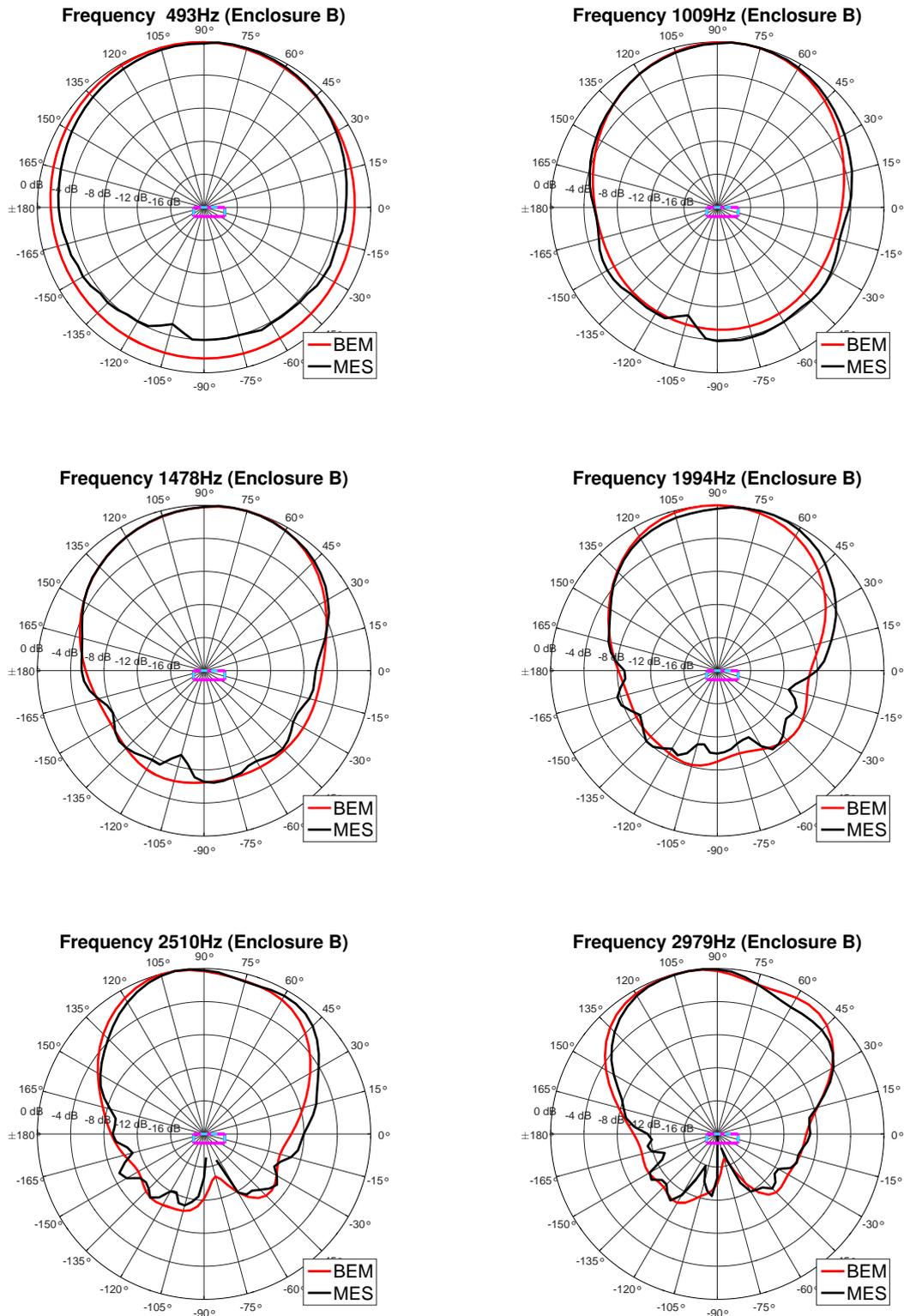


Figure I.4.4 – Directivités horizontales mesurées (bleu) et calculées par le BEM (rouge) dans le cas du HP2 (latéral) de l'enceinte B pour 6 fréquences différentes. Le tracé est effectué pour des capteurs situés à 1.1 m, en cercle autour de l'enceinte (dont la position dans l'espace est représentée en magenta) en utilisant la méthode de visualisation décrite dans Annexe B.

par les différents haut-parleurs et le radiateur. En effet, que ce soit pour le radiateur ou les haut-parleurs, ceux-ci sont mis en mouvement par le champ acoustique interne de la cavité, créée par le haut-parleur alimenté. Un autre argument en faveur du phénomène de couplage est l'effet d'oscillations spatiales. Il est particulièrement visible sur la Figure I.4.3, où le passage de 500 Hz à 1000 Hz semble doubler la période spatiale d'oscillation de la différence entre les mesures et le modèle numérique.

Enfin, l'imprécision semble plus importante pour le haut-parleur 1 que le haut-parleur 2, avec un maximum à la fréquence 1478 Hz où la mesure est très perturbée dans le cas du HP1. Or, 1478 Hz correspond à une longueur d'onde d'environ 23 cm, soit la longueur de l'enceinte B. Cela correspond au premier mode de résonance d'une cavité rectangulaire, qui est relatif à la plus grande dimension de celle-ci. Ce mode correspond à des ondes se propageant dans la direction de la longueur de l'enceinte, ce qui explique pourquoi il affecte plus le haut-parleur en position extrême. Les deux haut-parleurs latéraux et le radiateur passif perturberont le rayonnement de manière maximale pour une fréquence de 4.6 kHz, qui correspond à la largeur de l'enceinte, soit 7.4 cm. L'imprécision semble donc plus importante pour le haut-parleur 1 car il est positionné sur le baffle relatif à la plus grande dimension de la cavité rectangulaire, qui correspond à une fréquence située dans notre intervalle d'étude.

4.2 Motif de rayonnement tridimensionnel

4.2.1 Méthode de visualisation

On définit les motifs de rayonnement tridimensionnel de la même manière que l'on a défini les directivités horizontales, mais en parcourant cette fois toutes les positions de mesure. On les définit comme :

$$B(r_{obs}, \theta_1, \theta_2, f) = 20 \log_{10} \frac{p(r_{obs}, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [-\pi/2, \pi/2], f)}{\max_{\theta, \varphi} p(r_{obs}, \theta, \varphi, f)} \quad (\text{dB}) \quad (\text{I.4.2})$$

Pour visualiser ces fonctions périodiques de 2 dimensions, on les représente au moyen de *Balloon plot*. Ces surfaces fermées sont définies de sorte qu'à chaque direction de l'espace (θ, φ) est associé un rayon proportionnel à la quantité que l'on visualise, i.e la valeur B . La fréquence et le rayon d'observation sont considérés constants. Pour rendre la visualisation encore plus claire, on associe également à cette valeur la couleur de la surface. L'information est redondante mais facile à interpréter. Pour visualiser la phase, on utilise le même procédé mais en associant la couleur de la surface à la valeur de la phase. Comme on garde le rayon proportionnel à B , on peut facilement comparer les deux figures de phase et d'amplitude.

Comme dit précédemment, il n'est pas possible de tracer sur une même figure deux motifs pour les comparer. En revanche, ces motifs sont utiles pour décrire qualitativement le comportement global du rayonnement.

4.2.2 Résultats

Des visualisations en amplitude et en phase sont montrées sur les Figures I.4.5 et I.4.6 pour le haut-parleur 2 de l'enceinte A uniquement. Le micro est situé à une distance de

2.2 m.

On constate que les motifs de rayonnement de la Figure I.4.5 varient avec la fréquence. Ils peuvent être plus ou moins étalés selon l'axe vertical ou horizontal, ce que ne permettait pas d'apprécier les directivités dans le plan horizontal de la sous-section précédente. Si on regarde la fréquence 3253 Hz, on constate que le rayonnement peut présenter plusieurs lobes d'émission, qui ne sont pas forcément dans l'axe du haut-parleur. On pouvait déjà voir cet effet sur la Figure I.4.2 à la fréquence 2979 Hz. Lorsqu'on s'intéresse à la phase de la Figure I.4.6, on constate que la mesure présente des discontinuités que ne présente pas le modèle éléments finis. Les erreurs ne sont pas négligeables.

4.2.3 Discussion et Interprétation

Motif en amplitude

La variation du motif de rayonnement tridimensionnel avec la fréquence sera étudiée en détail dans les chapitres suivants. En particulier, les motifs de la Figure I.4.5 sont retrouvés avec le modèle numérique, et sont visibles sur la Figure II.6.7. À ce stade, il est important de constater que le maximum d'amplitude n'est pas tout le temps dans l'axe, comme on aurait pu s'y attendre intuitivement. Dans le chapitre 3, on expliquera complètement ce phénomène grâce à un modèle de diffraction.

Notons également que la mesure tridimensionnelle est sur-échantillonnée spatialement en face du haut-parleur, ce qui est visible sur la Figure I.2.3. Cette forte densité de points dans une direction, associée aux imprécisions de la mesure, laisse apparaître des artefacts visibles sur les motifs de la Figure I.4.5, et absents sur la Figure II.6.7. Ces artefacts sont encore plus marqués lors de l'examen de la phase (voir paragraphe suivant). Ces imprécisions de mesure limitent l'exploitation directe des motifs 3D issus des mesures.

Motif en Phase

La Figure I.4.6 représente la phase du rayonnement du HP2 de l'enceinte A obtenue avec les deux méthodes. La fréquence vaut 2063 Hz. Les figures mettent en évidence des discontinuités de la phase issues de la mesure. Ces discontinuités sont la conséquence d'erreurs de mesure qui sont accentuées lors de la reconstruction du motif mesuré dans les coordonnées sphériques à l'aide de l'Eq. (I.2.1).

Par exemple, on constate qu'une importante discontinuité apparaît lorsqu'on passe de la partie "haute" vers la partie "basse" du rayonnement. En utilisant les notations de l'Eq. (I.2.1), cela correspond au moment où la quantité $\theta + \pi/2$ est au voisinage de 0 ou de π . Or, en ces deux points, la position réelle θ_2 de l'enceinte est discontinue et présente un saut de π . Ainsi, même si ces points sont proches lors de l'affichage, ils correspondent à un retournement de l'enceinte de 180° lors de la mesure. Une erreur de positionnement de l'enceinte, ou un haut-parleur pas tout à fait symétrique, induit une erreur en phase qui est alors visible, car sa variation n'est pas continue. Autrement dit, on observe l'accumulation des erreurs de symétrie d'un seul coup.

C'est le même phénomène qui crée les imprécisions en amplitude face du haut-parleur, comme évoqué au paragraphe précédent. Ce phénomène, présenté ici à 2063 Hz est présent à toutes les fréquences, ce qui exclut une rotation rapide de la phase, qui impliquerait un problème de normalisation.

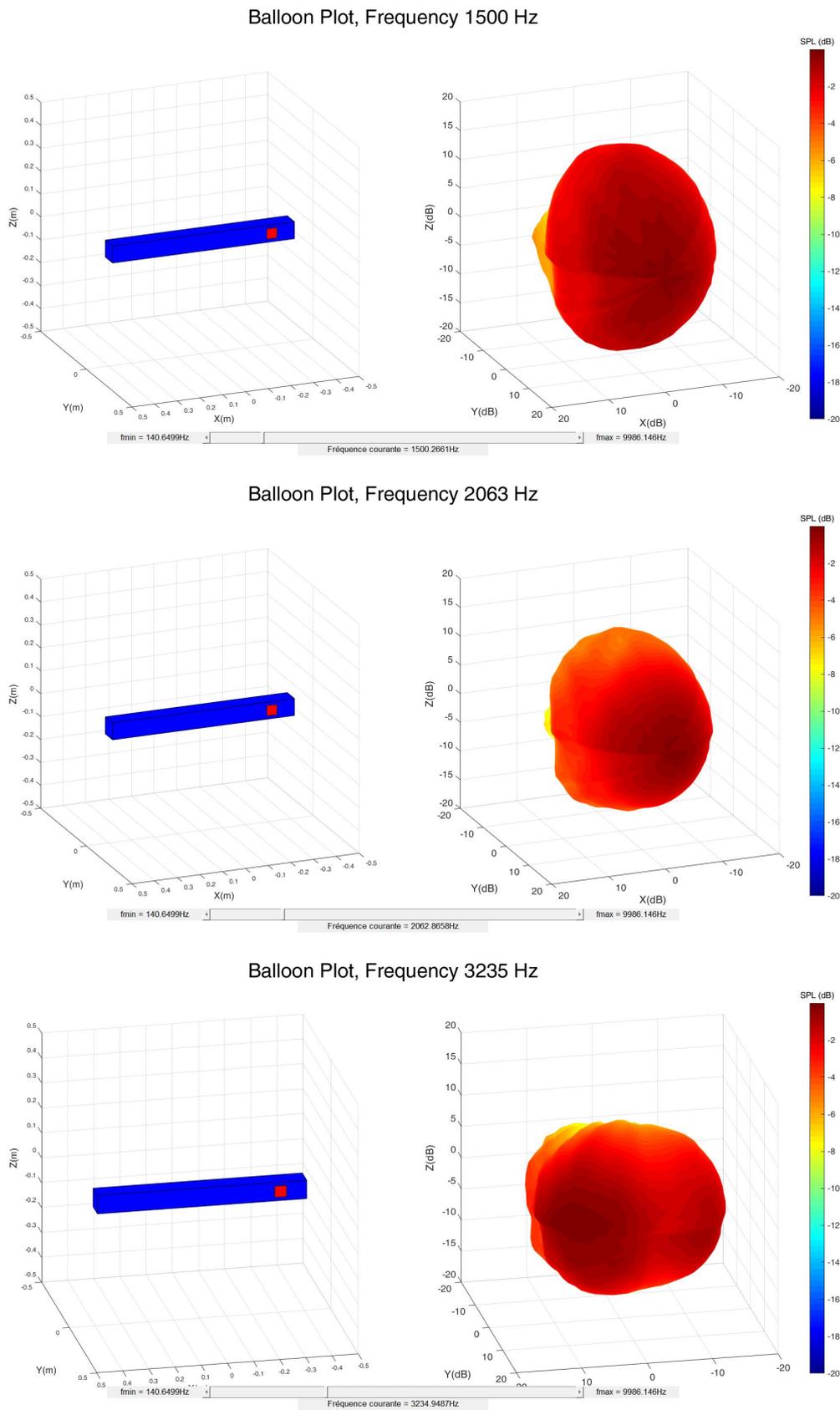
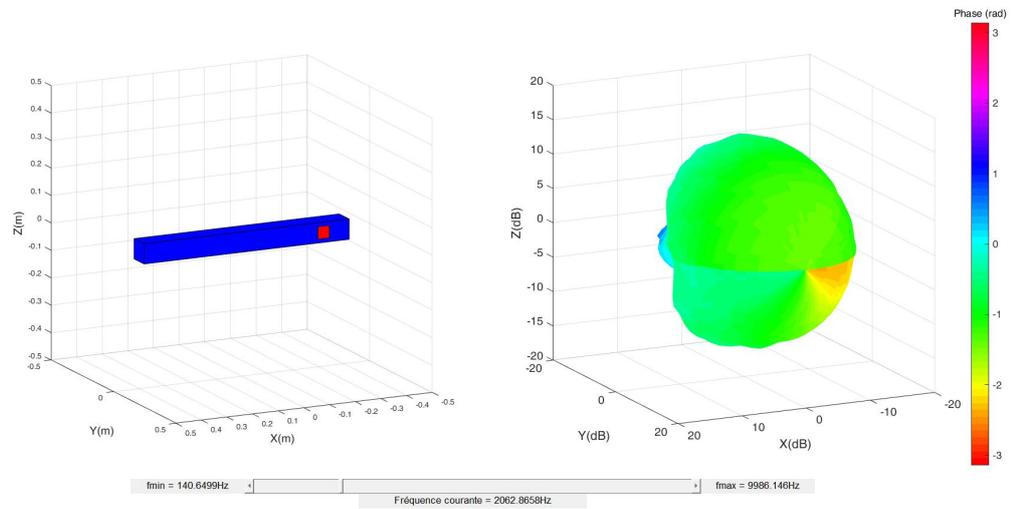
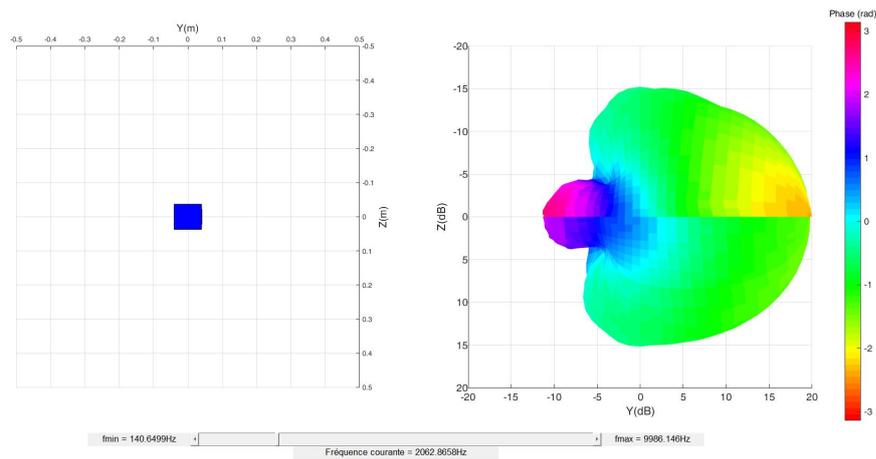


Figure I.4.5 – Champ tridimensionnel mesuré. Intensité de la pression (normalisée pour chaque fréquence) à 2.2m dans une direction de l'espace. Sa forme varie avec la fréquence. Ces figures peuvent être comparées aux résultats issus du moteur éléments finis dans le chapitre suivant.

Phase Balloon Plot, Frequency 2063 Hz



Phase Balloon Plot, Frequency 2063 Hz



Phase Balloon Plot, Frequency 2063 Hz

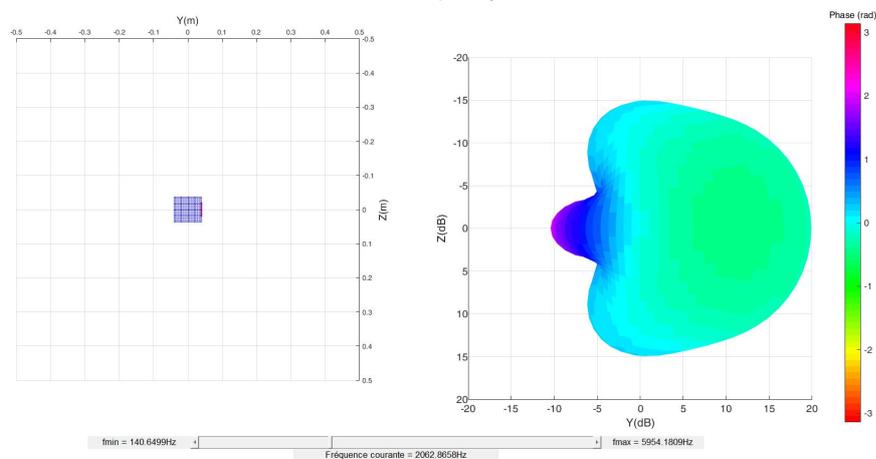


Figure I.4.6 – Comparaison de la phase du champ tridimensionnel mesurée et calculée par le BEM à 2.2 m dans une direction de l'espace à la fréquence 2063 Hz. La première figure est issue de la mesure, avec la vue orientée de la même manière que sur la Figure I.4.5. Les deux figures suivantes, en vue latérale, sont issues de la mesure et du moteur BEM respectivement.

L'erreur est évidemment plus importante pour la phase que pour l'amplitude. C'est encore plus vrai en haute-fréquence, car l'erreur de position est comparée à la longueur d'onde (d'environ 17 cm dans ce cas). Lors de l'examen de l'amplitude, l'erreur est ramenée au rayon d'observation (de moyenne égale à 2.2 m dans ce cas) du fait de la méthode décrite dans l'annexe Annexe B.

En conclusion, on ne gardera dans la suite que les motifs 3D issus du moteur BEM, qui sont considérés comme plus fiables et plus représentatifs.

4.3 Puissance rayonnée et réponse en fréquence dans l'axe

4.3.1 Méthode de visualisation

Dans cette sous-section, on présente trois indices fréquentiels très utilisés dans la littérature pour caractériser une enceinte. Par rapport aux directivités précédentes, normalisées à chaque fréquence, ils permettent de mieux apprécier l'évolution de l'amplitude du rayonnement avec la fréquence. Ces indices fréquentiels sont tous établis avec la transformation (justifiée dans l'Annexe B) permettant de se ramener à un comportement d'une fonction de Green plutôt qu'un monopôle. Cette transformation s'exprime par :

$$p(\vec{OR}, \omega) \leftarrow \frac{1}{\rho j \omega} p(\vec{OR}, \omega)$$

Pression dans l'axe

Le premier indice pour caractériser une enceinte est l'évolution de la pression dans l'axe du haut-parleur, souvent appelée réponse en fréquence d'un haut-parleur. On le définit comme suit :

$$P_{\text{OnAxis}}(f) = 20 \log_{10} \frac{p(r_{\text{obs}} \rightarrow \infty, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, f)}{p(r_{\text{obs}} \rightarrow \infty, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, f \rightarrow 0)} \quad (\text{dB}) \quad (\text{I.4.3})$$

C'est donc l'évolution fréquentielle de la pression acoustique, en champ lointain, en face de l'enceinte, normalisée par sa valeur en très basse-fréquence et exprimée en décibel. Le passage en champ lointain rend cette quantité identique que l'on choisisse la valeur en face du centre de l'enceinte ou celle en face du haut-parleur. Cet indice est important dans la caractérisation d'une enceinte, car celle-ci est généralement conçue pour être écoutée dans l'axe.

Remarque 1 : du fait de la transformation permettant de passer d'un monopôle à une fonction de Green, on s'attend à un gain de +6 dB (seulement) entre les très basses et les très hautes fréquences. En effet, en basse-fréquence, une enceinte rayonne dans tout l'espace, tandis qu'elle rayonne uniquement dans la moitié de l'espace en haute-fréquence. Ce gain est appelé *baffle step response*. Sans cette transformation, par exemple si on considère l'expression réelle d'un piston qui vibre à vitesse constante pour chaque fréquence, cet indice serait affecté par une pente de 6 dB/décade, du fait de la multiplication par ω de la pression. Le *baffle step response* a été mis en évidence expérimentalement pour la première fois par Olson dans [96].

Remarque 2 : Cet indice n'a pas de sens pour nos mesures, du fait de la fonction électrodynamique du haut-parleur. En effet, un haut-parleur a un comportement passe-haut dont la fréquence de coupure est la fréquence de résonance du couple haut-parleur/cavité (voir [89] par exemple). Dans la mesure, il n'y a donc pratiquement pas d'énergie en très basse-fréquence. La normalisation par cette valeur n'a donc pas sens ici. Pour cette dernière raison, et parce que le *baffle step response* a déjà été mis en évidence expérimentalement, on ne calculera pas cet indice pour nos mesures, et on se contentera d'une analyse des résultats numériques.

Puissance rayonnée

Un second indice pour caractériser le rayonnement d'un objet est la puissance totale rayonnée dans tout l'espace. On la définit à partir d'une surface fermée S_f entourant l'objet (généralement une sphère) comme :

$$\Pi(f) = \frac{1}{2} \iint_{y \in S_f} \Re \left\{ p(y) \langle \overrightarrow{v}(y), \overrightarrow{dS_f} \rangle \right\}$$

Si le rayon de la sphère S_f est suffisamment grand pour satisfaire l'hypothèse de champ lointain, on peut se passer du champ de vitesse pour le calcul :

$$\Pi(f) \approx \frac{1}{2\rho c} \iint_{y \in S_f} \|p(y \in S_f)\|^2 dS_f$$

avec ρ la densité de l'air et c la vitesse du son. Encore une fois, on étudiera l'indice en décibel et normalisé par sa valeur en basse-fréquence :

$$L_{\Pi}^* = 10 \log_{10} \frac{\Pi(f)}{\Pi(f \rightarrow 0)} \quad (\text{dB}) \quad (\text{I.4.4})$$

La puissance rayonnée d'une enceinte acoustique correspond à celle d'un monopole en basse-fréquence (l'enceinte est acoustiquement transparente), et tend vers 0 en très haute-fréquence si la source est un piston. Cet effet provient du phénomène de phase stationnaire qui montre que l'efficacité du rayonnement d'un piston est faible en haute-fréquence. Si la source était monopolaire, alors la puissance rayonnée est identique aux hautes et basses fréquences (sous couvert de la transformation de l'Annexe B), et la zone de transition représente les effets de baffle de l'enceinte. Elle peut diminuer ou augmenter selon la forme de l'enceinte et est un bon indicateur sur l'efficacité de rayonnement d'une enceinte.

La remarque 2 tient toujours ici, et on étudiera uniquement l'indice issu des calculs numériques.

Indice de directivité

Le troisième et dernier indice que l'on étudiera est l'indice de directivité, qui représente le ratio entre l'énergie rayonnée dans l'axe et l'énergie rayonnée dans tout l'espace. Il se définit avec l'aide des deux précédents, et s'écrit :

$$D(f) = \frac{P_{\text{OnAxis}}^2(f) \cdot S}{\Pi(f) \cdot \rho c} \quad (\text{I.4.5})$$

avec S la surface totale de S_f . Cet indice est également étudié en décibel, normalisé par sa valeur en basse-fréquence :

$$D^*(f) = 10 \log_{10} \frac{D(f)}{D(f \rightarrow 0)} \quad (\text{dB}) \quad (\text{I.4.6})$$

Encore une fois, on étudiera uniquement l'indice issu des calculs numériques.

4.3.2 Résultats

Sur la Figure II.6.8 est présentée une comparaison de ces trois indices pour les haut-parleurs 1 et 2 des enceintes A et B.

On constate que les indices issus du modèles BEM donnent des résultats similaires pour les deux enceintes lorsque l'on compare les haut-parleurs latéraux et extrémaux entre eux. Pour les deux enceintes, la pression dans l'axe du haut-parleur augmente avec la fréquence, dépassant la valeur limite en haute fréquence de 6 dB pour monter jusqu'à environ de 9 dB. Lorsque le haut-parleur est en position latérale (HP2), on voit apparaître une fréquence de résonance autour de 2100 Hz avec un pallier autour de 1200 Hz au préalable, et une chute de la pression après cette fréquence. C'est également à 2100 Hz que la puissance rayonnée dans tout l'espace prend sa valeur maximum de 3 dB. Lorsque le haut-parleur est en position extrême (HP1), on observe uniquement cette montée avec la fréquence, sans observer ni palier ni fréquence de résonance. L'examen de la puissance rayonnée par l'enceinte A laisse cependant penser que cette dernière devrait se situer autour des 3000 Hz.

4.3.3 Discussion et Interprétation

Pertinence de l'indice de directivité

Lorsque l'on compare les deux enceintes A et B via les indices de la Figure II.6.8, on peut se poser la question de la pertinence de cet indice. En effet, l'indice de directivité est approprié pour caractériser une enceinte acoustique prévue pour émettre dans l'axe des haut-parleurs qui la composent. Or, une barre de son n'est pas faite pour émettre dans un unique axe, et comporte une multitude de haut-parleurs à cette fin. L'utilisation de cet indice a moins de sens dans le cadre d'une barre de son. De plus, sur les motifs de rayonnement 3D, on a constaté que le maximum d'émissions ne se trouve pas nécessairement en face des haut-parleurs, et varie en fonction de la fréquence. Cet indice ne peut donc pas représenter la "directivité globale", i.e un indice qui caractériserait une certaine focalisation de l'enceinte dans une direction quelconque. Enfin, la puissance rayonnée des enceintes varie assez peu dans l'intervalle étudié, et l'indice de directivité n'apporte finalement pas beaucoup plus que la réponse en fréquence dans l'axe. Pour toutes ces raisons, on n'utilisera plus cet indice dans la suite de ce manuscrit.

Comparaison du rayonnement des deux barres de son

Les enceintes A et B décrites dans l'Annexe A ont la même hauteur et possèdent une différence de profondeur de 6 mm seulement. En conséquence, les baffles des HP1 sont pratiquement similaires. Par rapport à l'extrémité de l'enceinte, le centre du HP2 de l'enceinte A est situé à 10 cm du bord, tandis que celui de l'enceinte B est à 8.5 cm. Ces

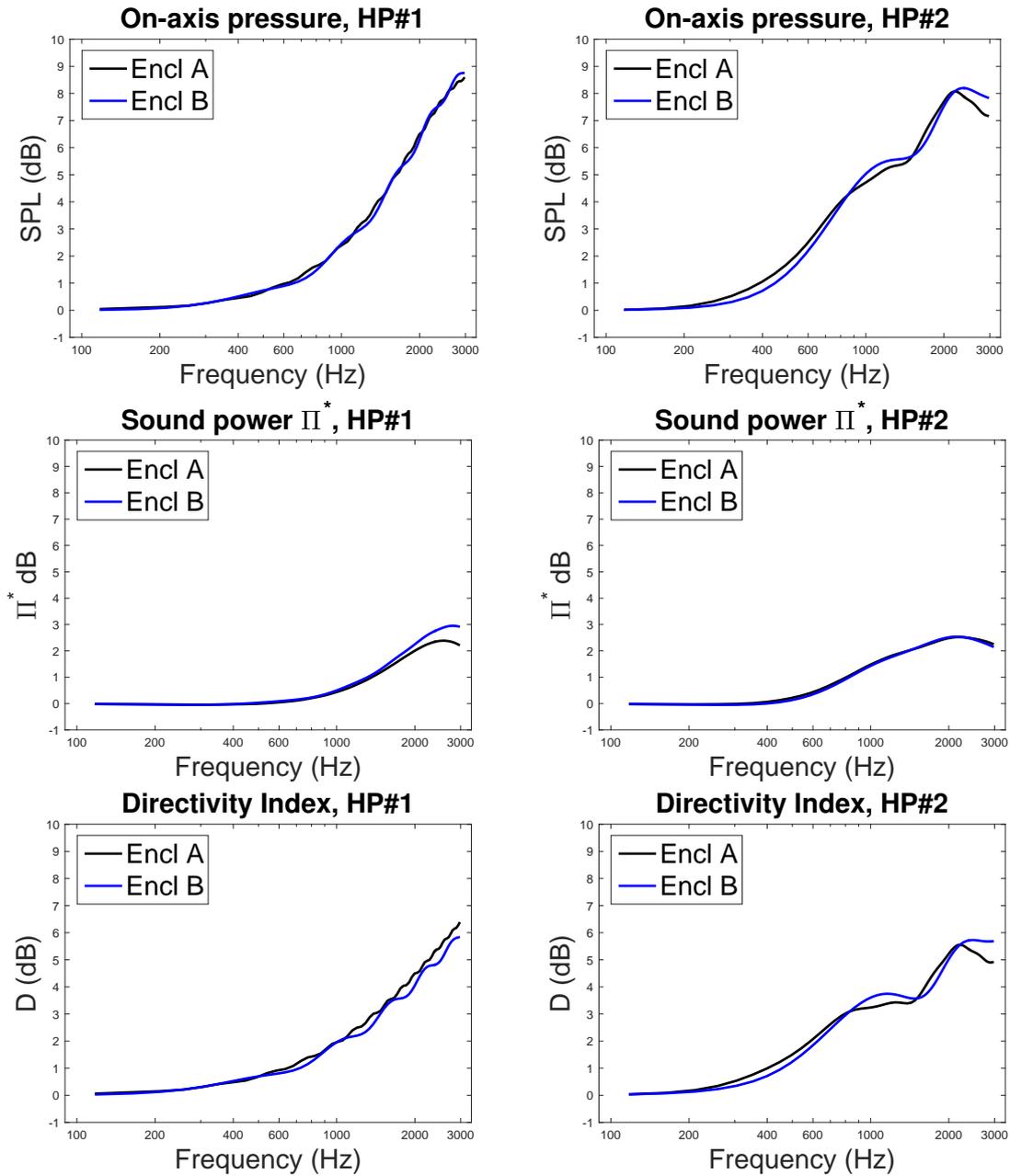


Figure I.4.7 – Les indices *On-axis pressure* (réponse en fréquence dans l'axe), *Sound power* (puissance rayonnée) et *Directivity Index* (indice de directivité), calculé par la BEM. Les indices sont tracés pour les haut-parleurs 1 et 2 de l'enceinte A (noir) et l'enceinte B (bleu) qui ont une géométrie locale équivalente. Les résultats sont sensiblement équivalents. La différence de longueur entre les deux enceintes a peu d'influence sur ces indices.

deux derniers haut-parleurs ont un diamètre de 4.5 cm. Au voisinage des haut-parleurs, ces deux barres de son sont donc très proches, tout comme le sont leurs indices. Il semble donc que la géométrie locale (et en particulier la section des barres de son) soit prédominante pour déterminer à la puissance rayonnée, ainsi que la pression dans l'axe du haut-parleur. Notons cependant que leurs rayonnements dans tout l'espace sont différents. Il suffit de regarder la différence entre les Figures I.4.2 et I.4.4 pour s'en rendre compte. La géométrie locale ne peut donc pas expliquer tout le rayonnement dans l'espace, bien qu'elle suffise à caractériser les indices de la Sect. 4.3. Ces indices sont donc limités.

Les deux pressions dans l'axe atteignent la valeur de 9 dB. L'effet de baffle étant responsable de l'augmentation de 6 dB, les 3 dB restant proviennent forcément du phénomène de diffraction par l'enceinte. Il sera montré dans le chapitre 3 que des interférences constructives de la diffraction par les arêtes apparaissent pour toutes les enceintes de forme rectangulaire.

Enfin, le palier présent sur la courbe de la pression dans l'axe des HP2, qui n'est pas présent sur celle des HP1, est interprété comme la contribution de l'arête en position extrême. Cette interprétation est confirmée lorsque l'on regarde la courbe de pression dans l'axe du HP3 (non représentée), pour laquelle ce palier apparaît à une fréquence plus faible (et donc une longueur d'onde plus grande). C'est une conséquence du positionnement du HP3, qui est plus éloigné du bord que le HP2.

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par expliquer le fonctionnement d'un système de restitution sonore à l'aide d'une étude bibliographique. Ainsi, nous avons pu définir précisément la problématique de ce manuscrit. Cette étude nous a également permis de décrire les différents phénomènes contribuant au rayonnement d'un système de restitution sonore, et d'isoler celui qui nous intéresse : le phénomène de diffraction du son par l'enceinte. Pour le caractériser, nous avons conçu un montage permettant de mesurer la directivité des barres de son dans une salle non anéchoïque. Cette mesure se base sur une reconstruction de la réponse impulsionnelle qui permet de séparer la partie linéaire de la partie non-linéaire, ainsi que le champ direct du champ réfléchi. Cette reconstruction est basée sur un mélange des méthodes ESS développées par Novak et Rébillat, que l'on a décrites dans un formalisme unifié. Nous avons ensuite utilisé un modèle numérique d'éléments finis de frontière implémenté sous Matlab, dont on a décrit le fonctionnement et donné les détails d'implémentation. Enfin, nous avons comparé les résultats issus de la mesure et du modèle numérique en considérant deux barres de son. Pour cela, on a comparé la directivité horizontale normalisée à chaque fréquence, ainsi que la pression dans l'axe et la puissance rayonnée. Le motif de rayonnement tridimensionnel, ou directivité 3D, a également été interprété qualitativement. Nous avons constaté que le modèle numérique était capable de prédire correctement l'amplitude de la pression que l'on observe expérimentalement à 1 dB près. Les résultats sont moins bons lorsque la barre de son ne possède pas de cavités internes limitant le couplage des haut-parleurs (erreur de 3 dB). L'analyse des motifs tridimensionnels a montré que les mesures n'étaient pas d'assez bonne qualité pour obtenir une estimation de la phase satisfaisante, du fait des erreurs de positionnement de l'enceinte. Néanmoins, le modèle BEM a été considéré comme assez précis pour être utilisé comme référence dans la suite de cette thèse, en particulier dans les chapitres

suivants. Il a également été constaté que certaines caractéristiques prédites (pression dans l'axe et puissance rayonnée) des deux barres de son étaient très similaires malgré leur différence de longueur, laissant penser que la géométrie locale (très proche pour les deux barres de son) gouverne ces caractéristiques. Cependant, on constate que les directivités restent différentes. Des interprétations plus fines laissent penser que la diffraction par les arêtes de la barre de son joue un rôle essentiel dans le rayonnement. Cette interprétation sera confirmée, puis étayée dans le chapitre 3.

★ II ★

Méthode orientée basse-fréquence : le modèle sphéroïdal

Résumé

Ce chapitre présente un modèle habituellement utilisé en acoustique sous-marine où l'on considère une enceinte prenant la forme d'une ellipse de révolution. En définissant la source comme une portion vibrante de ce sphéroïde, il est possible de résoudre l'équation de Helmholtz par séparation des variables. De cette manière, le calcul prend une forme analytique. Le calcul des fonctions propres reste difficile. L'enceinte considérée ici est une barre de son qui, par son côté allongé, prend pleinement avantage des coordonnées sphéroïdales par rapport aux coordonnées sphériques. Une méthode pour modéliser un piston *circulaire* plutôt qu'un classique piston *carré* est présentée. Plusieurs méthodes pour choisir le sphéroïde en fonction de la forme de l'enceinte sont également présentées et comparées. Enfin, un critère pour choisir l'ordre de troncature des fonctions d'onde sphéroïdale est établi et vérifié en pratique. Les résultats montrent que le modèle fonctionne aux basses et moyennes fréquences. L'étude suggère également que le rayonnement d'un sphéroïde est plus régulier que celui d'une forme rectangulaire, ce qui laisse penser que ce type d'enceinte serait plus adapté à la recherche d'une restitution neutre.

Table des matières

1	Introduction	64
2	Rayonnement d'un piston sur une enceinte sphéroïdale	67
2.1	Le système de coordonnées sphéroïdales	67
2.2	Expression de la pression rayonnée par un piston sur une enceinte sphéroïdale	70
3	Calcul pour un piston <i>carré</i> ou <i>circulaire</i>	75
3.1	Portions latérales quasi-rectangulaires	75
3.2	Portions quasi-circulaires	77
4	Critère de troncature des harmoniques sphéroïdales	78
4.1	Harmoniques sphéroïdales	79
4.2	Puissance rayonnée et facteur de rayonnement modal	87
5	Mise-en-œuvre : choix du sphéroïde	96
5.1	Caractéristiques recherchées	96
5.2	Expression des contraintes	97
5.3	Combinaisons de contraintes et visualisation des sphéroïdes obtenus	98
6	Résultats	101
6.1	Convergence de la solution	101
6.2	Forme du sphéroïde	102
6.3	Directivité horizontale	105
6.4	Motif de rayonnement tridimensionnel	105
6.5	Puissance rayonnée et réponse en fréquence dans l'axe	111
6.6	Temps de calcul	113
7	Discussion	114
7.1	Utilisation du critère de troncature	115
7.2	Sphéroïde optimal dans le cadre de la modélisation	115
7.3	Modélisation d'un haut-parleur en position extrême	116
7.4	Modélisation d'un haut-parleur en position latérale	117
8	Conclusion et Perspectives	118

1 Introduction

L'idée de ce chapitre est de proposer un modèle analytique pour décrire le rayonnement d'une barre de son. La forme de l'enceinte réelle va être approximée par une forme pour laquelle on sait résoudre analytiquement le problème de Helmholtz. Un tel travail a été effectué par Aarts avec une enceinte rectangulaire de dimensions standards modélisée par une sphère rigide [2, 1]. L'équation de Helmholtz est en effet séparable dans les coordonnées

sphériques. Les résultats obtenus sont meilleurs que ceux issus du traditionnel modèle du piston plan. Notons qu'il est aussi possible d'obtenir le développement du rayonnement sur les harmoniques sphériques par d'autres méthodes. Par exemple, par la mesure en s'affranchissant de l'influence de la salle [154], ou bien par projection et minimisation de la vitesse surfacique sur une sphère virtuelle englobant l'enceinte [20]. On profite alors des propriétés de ces harmoniques, par exemple en terme d'interprétation des modes rayonnants [153]. Ces développements sont d'autant plus pertinents que les modes acoustiques d'une sphère ressemblent à ceux d'un boîte rectangulaire [37], en particulier en terme de facteur de rayonnement. Il existe d'ailleurs d'autres interprétations de ces modes. Ils sont en effet reliés aux ondes rampantes via une transformation de Watson [142, 141] et l'application de ces transformations au cas sphérique existe déjà [114, 115]. Au delà de l'interprétation, on peut aussi contrôler le rayonnement de telles enceintes si elles comportent plusieurs haut-parleurs. Pour des enceintes sphériques réelles, ce contrôle peut se faire sur la base des harmoniques sphériques [107], ou sur les modes de rayonnement [99]. De nombreuses études ont été faites sur cette approche (voir aussi [165]), bien que le caractère sphérique peut amener certains problèmes de résonance ou *d'aliasing* [97, 108]. Il est aussi possible de se servir de telles enceintes pour contrôler un champ sonore déjà existant [9].

Cependant, l'approche en coordonnées sphériques n'est pas adaptée au cas d'une enceinte allongée. De fait, la géométrie sphérique a du mal à rendre compte de l'asymétrie de la barre de son ; et le développement du rayonnement sur les harmoniques sphériques souffre du même problème. Un autre modèle envisageable, très étudié dans la littérature, serait celui du piston sur un cylindre. Les premières expressions sur cylindre infini sont données par Laird [71] et Greenspoon [47]. Il existe aussi des expressions pour section non-circulaire [17], ou pour des réseaux de pistons [92]. Mais puisque le cylindre est infini, l'application du contrôle de la directivité ne peut se faire que dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. Dans ce dernier cas, l'application est alors un succès, en se servant notamment du caractère analytique de la directivité [112, 68, 105]. Il existe bien des expressions pour des cylindres finis, obtenues avec différentes méthodes de dérivations [23, 111, 157], mais aucune n'est capable de prédire le rayonnement dans l'axe du cylindre.

Dans ce chapitre, on propose donc un modèle basé sur les coordonnées sphéroïdales, dans lesquelles l'équation de Helmholtz est séparable. L'enceinte est alors modélisée par une ellipse de révolution. La séparation de l'équation de Helmholtz dans ces coordonnées fait apparaître les fonctions d'ondes sphéroïdales, qui sont beaucoup plus complexes à calculer que leurs homologues sphériques. Les premières résolutions de l'équation avec ces coordonnées sont faites par Lamé en 1837, puis s'ensuivent de nombreuses études qui aboutissent aux deux ouvrages de référence par Flammer et Meixner [42, 84], auxquelles on ajoutera les développements asymptotiques de Slepian [125]. Notons que ces fonctions peuvent être utilisées comme base d'une série entière [91] ou d'une quadrature [160] et possèdent une propriété de double orthogonalité [110]. La liste des propriétés utiles pour l'acoustique est, entre autres, donnée par [60]. Il existe plusieurs approches pour calculer ces fonctions [3, 62, 152], en particulier la méthode de Van Buren [146, 148] qui donne en plus un programme Fortran permettant de calculer ces fonctions rapidement pour un large panel de valeurs. Cette méthode – que nous utiliserons dans ce chapitre – a ouvert la porte à de nombreuses applications. Ces avancées s'accompagnent d'un regain d'intérêt pour ces coordonnées, jusqu'au domaine de la géologie [78].

En acoustique, c'est le rapport d'aspect apporté par ces coordonnées qui les rend at-

tractives. Par rapport aux coordonnées sphériques, une direction est privilégiée. En calcul éléments finis, cela permet de définir des conditions de radiations sur une ellipse de révolution entourant la scène plutôt que sur une sphère, ce qui permet de réduire le nombre d'éléments [22, 11]. On peut aussi tirer profit de cette asymétrie dans les éléments spectraux [43], la méthode dite des éléments infinis [21], ou plus récemment dans de nouvelles méthodes numériques, comme par exemple la *Pattern equation method* [65]. Il existe aussi des applications dans l'étude de structure plane (vibroacoustique) par l'intermédiaire du faisceau baffé [81]. Cependant, historiquement, c'est la diffraction par un ellipsoïde de révolution qui a été étudiée en premier.

La méthode de séparation des variables permet de résoudre l'équation de Helmholtz en considérant, comme condition aux limites, une surface "naturelle" des coordonnées utilisées, i.e une variable constante. Le rayonnement du plan, de la sphère, ou du cylindre infini est bien connu car correspondant à un système de coordonnées particulier. En coordonnées sphéroïdales, la surface la plus naturelle est l'ellipse de révolution. C'est donc la diffraction par cette surface qui a été la plus étudiée dans la littérature, en particulier en acoustique sous-marine, où un ellipsoïde peut modéliser des formes réelles (poissons, sous-marins ...). Il est intéressant de connaître la réponse d'un tel objet lorsque la source est située à l'infini comme dans le cas du sonar. Ainsi, la première étude est faite par Spence en 1951 [127], bien que le calcul soit coûteux. Des approximations en basse-fréquence sont données par Senior quelque temps après [121]. Dans le domaine des hautes fréquences, on utilise la théorie géométrique de la diffraction avec succès, que la source soit à l'infini [56], ou n'importe où dans l'espace extérieur [77], avec validation expérimentale [15]. L'utilisation d'autres théories est bien évidemment possible [34]. Comme en sphérique, on peut relier les modes aux ondes rampantes grâce à la méthode d'Uberall [123, 124] bien que les expressions complexes qui en ressortent n'ont pas encore trouvé d'application. Récemment, de nouvelles avancées ont été faites dans ce domaine par Calvo [26], en utilisant la méthode *OSRC*, introduite par Kriegslann et basée sur les ondes rampantes. Avant la méthode de Van Buren, les calculs sont des approximations qui font apparaître des lobes secondaires très prononcés par rapport au cas sphérique, du fait de l'asymétrie de l'ellipse [119]. La méthode de Van Buren, ouvre la porte à une multitude d'applications comme : l'étude du sphéroïde pénétrable [69] ou impénétrable [113] avec conversion de l'expression en harmoniques sphériques ; le cas où le sphéroïde est proche d'un ou plusieurs murs [88] ; le cas pour plusieurs sphéroïdes [75] ; le calcul pour des excentricités très fortes [4, 5] ; ou encore l'influence du bateau lors de l'utilisation sous-marine d'un *AVS* (détection de la direction de provenance d'un son) [52]. De façon plus anecdotique, il est aussi possible d'étudier le mouvement d'un sphéroïde induit par un champ acoustique [164].

Le cas du rayonnement d'un sphéroïde lorsque la source est située sur sa surface est plus rare dans la littérature. La première mention est attribuée à Chertock [31], dont les notations sont singulières. Chertock donne néanmoins l'expression générale du rayonnement du sphéroïde pour n'importe quelle distribution de vitesse sur sa surface, mais le calcul n'est fait que pour certains cas particuliers qui nécessitent peu d'ordre pour converger. Van Buren et Boisvert proposeront plus tard des calculs plus complexes, en considérant des simples portions vibrantes de manière uniforme (i.e des pistons carrés) sur le sphéroïde [146, 16, 18, 147]. Dans ce chapitre, nous reprenons ce modèle pour prédire le rayonnement d'une enceinte de type "barre de son" (i.e une boîte rectangulaire très allongée). Par rapport à Van Buren et Boisvert, on propose, à la Sect. 3, une méthode pour le calcul de

piston circulaire. On développe un critère pour choisir l'ordre des fonctions sphéroïdales en fonction de la fréquence et des dimensions du sphéroïde à la Sect. 4. On propose également une méthode pour choisir le sphéroïde en fonction des dimensions de la barre, à la Sect. 5. On se sert finalement des résultats obtenus pour comparer le rayonnement d'une barre de son rectangulaire et d'une barre de son sphéroïdale dans la Sect. 6.

2 Rayonnement d'un piston sur une enceinte sphéroïdale

2.1 Le système de coordonnées sphéroïdales

2.1.1 Les coordonnées sphéroïdales

Relation de passages

Dans ce chapitre, on utilise les coordonnées sphéroïdales (Figure II.2.1), notées (ξ, η, φ) , définies par les relations de passage aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) suivantes :

$$O\vec{M}(x, y, z) = \begin{cases} x = \frac{d}{2}\sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2-1)}\cos(\varphi), & 1 \leq \xi < \infty \\ y = \frac{d}{2}\sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2-1)}\sin(\varphi), & -1 \leq \eta \leq 1 \\ z = \frac{d}{2}\eta\xi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{II.2.1})$$

ainsi que les relations réciproques :

$$O\vec{M}(\xi, \eta, \varphi) = \begin{cases} \xi = \frac{1}{d} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} \right) \\ \eta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} \right) \\ \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{cases} \quad (\text{II.2.2})$$

Les surfaces coordonnées (voir Annexe C) sont une ellipse et une hyperbole de révolution ayant leurs foyers (Figure II.2.1) confondus, et un plan contenant ces foyers. L'ellipse et l'hyperbole sont définies pour une distance inter-focale d commune, qui peut être choisie arbitrairement. Il existe donc des systèmes de coordonnées sphéroïdales, et en toute rigueur on devrait dire parler de coordonnées sphéroïdales d'un point, pour le paramètre d . Dans la suite, on dira simplement les coordonnées sphéroïdales.

Le paramètre ξ représente l'inverse de l'excentricité e de l'ellipse ($\xi = 1/e$). Ce n'est pas une distance, mais il a tendance à jouer un rôle analogue au paramètre de distance r , des coordonnées sphériques. Le paramètre η est l'inverse de l'excentricité de l'hyperbole. Il est aussi égal à $\cos \theta$, avec θ l'angle entre son axe focal et son asymptote. Le paramètre φ est l'angle par rapport à l'axe Ox , défini autour de l'axe Oz .

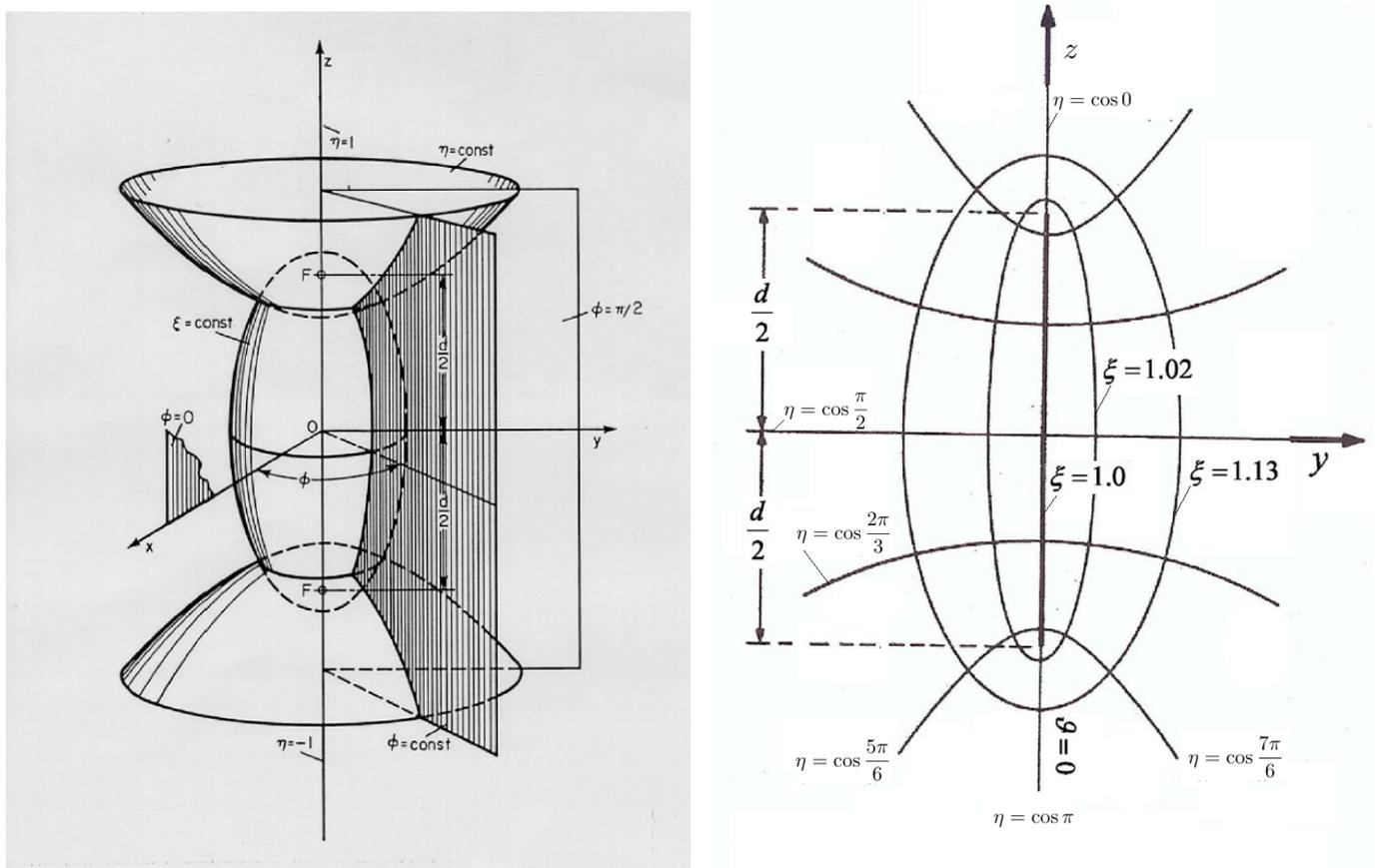


Figure II.2.1 – Illustrations des coordonnées sphéroïdales, d'après [147]. Le paramètre ξ est l'inverse de l'excentricité de l'ellipse. Ce n'est pas une distance, mais il a tendance à jouer un rôle analogue au paramètre de distance r , des coordonnées sphériques. Le paramètre η de l'hyperbole peut être vu comme le cosinus de l'angle θ , qui est l'angle entre son axe focal et son asymptote. L'angle φ représente une rotation.

Par la suite, on sera souvent amené à considérer les demi-axes de l'ellipse définie par le paramètre ξ . On rappelle donc les formules suivantes :

— demi-petit axe :

$$b = d/2\sqrt{\xi^2 - 1}$$

— demi-grand-axe :

$$a = d/2\xi$$

On rappelle également l'expression du volume et de la surface d'une ellipse de révolution :

$$V = 4/3\pi ab^2 \quad (\text{II.2.3})$$

et

$$S = 2\pi(b^2 + ab\xi \arcsin(1/\xi)) \quad (\text{II.2.4})$$

Enfin, on aura besoin du périmètre d'une ellipse. Cette quantité peut s'exprimer à l'aide d'intégrales elliptiques de seconde espèce. Une approximation courante pour un sphéroïde pas trop excentrique est celle de Ramanujan, donnée par :

$$\Delta_l \approx \pi(a+b) \left(1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4 - 3h}} \right) + O(h^5) \quad (\text{II.2.5})$$

avec $h = (a-b)^2/(a+b)^2$.

Expression des opérateurs

On donne ici les expressions des opérateurs qui nous seront utiles dans la suite de ce chapitre. En utilisant les relations de passages précédentes et les définitions et formules de l'Annexe C, on obtient les facteurs d'échelle relatifs aux trois coordonnées, notés respectivement e_ξ, e_η, e_φ :

$$\begin{cases} e_\xi = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)}} \\ e_\eta = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{(\xi^2 - \eta^2)}{(1 - \eta^2)}} \\ e_\varphi = \frac{d}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \end{cases} \quad (\text{II.2.6})$$

Ces facteurs d'échelle permettent, en appliquant les formules de l'Annexe C, d'obtenir les expressions souhaitées (avec $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\varphi)$ la base orthonormée des coordonnées sphéroïdales).

Pour le Gradient :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial f}{\partial \xi} \vec{e}_\xi + \frac{2}{d} \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{1}{e_2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \vec{e}_\eta + \frac{2}{d} \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{II.2.7})$$

Pour le vecteur élémentaire de surface :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dS} &= \frac{d^2}{4} \sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} d\eta d\varphi \vec{e}_\xi + \\ &\frac{d^2}{4} \sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)} d\xi d\varphi \vec{e}_\eta + \frac{d^2}{4} \frac{(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} d\xi d\eta \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{II.2.8})$$

et enfin le Laplacien :

$$\Delta f = \frac{1}{d/2(\xi^2 - \eta^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{d/2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (\text{II.2.9})$$

2.2 Expression de la pression rayonnée par un piston sur une enceinte sphéroïdale

On peut maintenant résoudre l'équation de Helmholtz dans les coordonnées sphéroïdales.

2.2.1 Définition du problème

Soit p le champ scalaire représentant la pression acoustique. On cherche à résoudre l'équation de Helmholtz dans l'espace extérieur au sphéroïde de référence, défini par $\xi = \text{Cte} = \xi_0$, lorsqu'une portion S_0 de ce sphéroïde est le siège d'une distribution de vitesse $v_0(\eta, \varphi)$, donnée à une fréquence ω . On a donc le problème suivant :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (\text{II.2.10})$$

et

$$\langle \vec{v}(\xi_0, \eta, \varphi), \vec{e}_\xi \rangle = \begin{cases} v_0(\eta, \varphi) & \text{si } (\eta, \varphi) \in S_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.2.11})$$

avec \vec{v} la vitesse acoustique définie par la relation d'Euler linéarisée, avec la convention $e^{-j\omega t}$:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho j\omega \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} p \quad (\text{II.2.12})$$

On ajoute également la condition de Sommerfeld, classiquement exprimée dans les coordonnées sphériques comme suit :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right) \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} - jk\hat{p} \right) \right] = 0 \quad (\text{II.2.13})$$

Avec $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde, c la vitesse du son, et ρ la masse volumique du milieu de propagation.

Notre problème est donc un problème de propagation acoustique extérieure à une surface donnée (ici un sphéroïde de révolution) sur laquelle on impose une condition de

Neumann (condition de vitesse).

2.2.2 Solution générale de l'équation de Helmholtz par la méthode de séparation des variables

L'expression de l'équation de Helmholtz dans les coordonnées sphéroïdales s'écrit à l'aide de l'Eq. (II.2.9) :

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + h^2(\xi^2 - \eta^2) \right] p(\xi, \eta, \varphi) = 0 \quad (\text{II.2.14})$$

avec h le paramètre de fréquence réduite tel que :

$$h = \frac{1}{2}kd \quad (\text{II.2.15})$$

On cherche maintenant à caractériser l'ensemble des solutions par la méthode de séparation des variables. Cette méthode est applicable uniquement lorsque les conditions aux limites peuvent se mettre sous la forme de variables séparées. C'est le cas de notre problème défini sur une surface $\xi = \xi_0$.

En utilisant les propriétés périodiques des variables φ et η , on cherche la solution élémentaire Φ_{ml} sous la forme :

$$\Phi_{ml}(\xi, \eta, \varphi) = R_{ml}(h, \xi) S_{ml}(h, \eta) e^{jm\varphi} \quad (\text{II.2.16})$$

Il apparaît que cette solution est le produit des fonctions solutions des 3 équations suivantes :

$$\frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{d}{d\xi} R_{ml}(h, \xi) \right] - \left[\lambda_{ml} - h^2 \xi^2 + \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right] R_{ml}(h, \xi) = 0 \quad (\text{II.2.17})$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{d}{d\eta} S_{ml}(h, \eta) \right] + \left[\lambda_{ml} - h^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] S_{ml}(h, \eta) = 0 \quad (\text{II.2.18})$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} (e^{jm\varphi}) + m^2 e^{jm\varphi} = 0 \quad (\text{II.2.19})$$

Avec λ_{ml} une constante dont l'expression est donnée dans [42]. Elle est commune aux deux équations Eq. (II.2.17) et Eq. (II.2.18). On appelle R_{ml} les fonctions d'ondes radiales et S_{ml} les fonctions d'ondes angulaires, en analogie avec les solutions sphériques. Remarquons que les Eqs. (II.2.17) et (II.2.18) sont identiques, et que les fonctions R_{ml} et S_{ml} sont les solutions d'équations différentielles identiques portant sur des domaines de définition différents : les domaines de définition de ξ et de η .

On considère uniquement le cas où les constantes m et l sont des entiers (Voir Sect. 2.2.3). On peut vérifier que ces fonctions Φ_{ml} forment bien une base orthogonale pour les fonctions allant de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} et la fonction p solution s'écrit alors comme :

$$p(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} A_{ml} \Phi_{ml}(\xi, \eta, \varphi) \quad (\text{II.2.20})$$

que l'on peut aussi écrire de manière équivalente :

$$p(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} \Phi_{nm}(\xi, \eta, \varphi) \quad (\text{II.2.21})$$

Cette dernière représentation utilise une indexation (m, n) similaire aux solutions usuelles du problème posé, obtenues par la méthode de séparation des variables en coordonnées sphériques (et pour lequel le sphéroïde ξ_0 est alors une sphère de rayon r_0 , avec une condition de Neuman).

2.2.3 Restrictions issues des propriétés des fonctions sphéroïdales.

Les fonctions Φ_{ml} sont des solutions élémentaires de l'équation de Helmholtz pour lesquelles les variables des coordonnées sphéroïdales sont séparées. On impose ensuite des contraintes physiques additionnelles, ce qui nous permet de réduire encore notre espace de solution, et d'expliquer pourquoi les constantes m et l sont des entiers. Cette étape permet une meilleure compréhension du critère de troncature.

Périodicité de φ . Puisque la variable φ est 2π périodique, les solutions le sont aussi. Cette condition impose m entier dans Eq. (II.2.19).

Définitions sur tout l'espace. Les équations différentielles Eq. (II.2.17) et Eq. (II.2.18) sont singulières en $\xi = \pm 1$ et $\eta = \pm 1$. De la même manière qu'ils existent des fonctions de Bessel sphériques de première ou de seconde espèce selon si elles sont définies en 0 ou non, il existe des fonctions d'ondes radiales et angulaires de premier type ou de second type selon si elles sont définies en $\xi = 1$ et en $\eta = \pm 1$. On les notera respectivement : $R_{ml}^{(1)}$, $R_{ml}^{(2)}$, $S_{ml}^{(1)}$ et $S_{ml}^{(2)}$. Ces fonctions représentent l'ensemble des solutions des équations. Cependant, on cherche des solutions qui sont définies en tout point de l'espace extérieur. En particulier, les fonctions S_{ml} doivent être définies pour les angles $\eta \pm 1$. Les fonctions $S_{ml}^{(2)}$ étant indéfinies en ces points, on garde donc uniquement $S_{ml}^{(1)}$.

Remarques sur la description sous forme de mode. Meixner montre que l'existence des fonctions $S_{ml}^{(1)}$ nécessite que l soit un entier [84]. En conséquence, la constante λ_{ml} ne peut prendre ses valeurs uniquement dans un ensemble discret. On est face à une représentation par mode.

Remarquons que lorsqu'on résout l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques, c'est une condition analogue qui impose à n d'être un entier (avec les notations classiques). On impose alors une périodicité sur l'angle azimutal (constante m) et l'existence de solutions lorsque la colatitude vaut 0 ou π (constante n). Cette dernière condition sous-entend que la surface est finie, ce qui permet une description par mode sous forme de double somme. A contrario, si on considère les coordonnées cylindriques, alors le rayonnement est décrit par une somme et une intégrale, qui traduisent le confinement des modes selon l'angle de rotation (somme) et l'absence de confinement dans la direction de l'axe du cylindre (intégrale).

Conditions de Sommerfeld. À la place d'utiliser le jeu de fonction $R_{ml}^{(1)}$ et $R_{ml}^{(2)}$ pour décrire les solutions de l'équation Eq. (II.2.17), on peut définir et utiliser sans perte de généralité les fonctions $R_{ml}^{(3)} = R_{ml}^{(1)} + iR_{ml}^{(2)}$ et $R_{ml}^{(4)} = R_{ml}^{(1)} - iR_{ml}^{(2)}$ qui seront l'analogie des fonctions de Hankel sphériques dans les coordonnées sphéroïdales.

L'interprétation physique de ces fonctions est analogue au cas sphérique : les fonctions $R_{ml}^{(1)}$ et $R_{ml}^{(2)}$ représentent des ondes stationnaires ; la fonction $R_{ml}^{(3)}$ représente une onde qui se propage en provenant de l'infini ; la fonction $R_{ml}^{(4)}$ représente une onde qui se propage en direction de l'infini. [60].

Or on veut que la condition de Sommerfeld, définie par Eq. (II.2.13), soit remplie. Seule la fonction $R_{ml}^{(4)}$ répond à cette condition, on gardera donc uniquement celle-ci.

Normalisation. Par application directe du théorème de Sturm Liouville à l'équation II.2.18 (i.e en considérant la périodicité de la variable η), l'orthogonalité des fonctions S_{ml} apparaît telle que :

$$\int_{-1}^1 \overline{S_{ml}^{(1)}(h, \eta)} S_{pq}(h, \eta) d\eta = \begin{cases} N_{ml} & \text{si } m = p \text{ et } l = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.2.22})$$

N_{ml} est donnée par [84], tel que :

$$N_{ml} = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \quad (\text{II.2.23})$$

Additionnellement, les fonctions S_{ml} ont les propriétés suivantes [60] :

$$S_{-m,l}(h, \eta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} S_{ml}(h, \eta) \quad (\text{II.2.24})$$

et

$$R_{-m,l}(h, \xi) = R_{ml}(h, \xi) \quad (\text{II.2.25})$$

On en déduit que si m est négatif, la fonction élémentaire Φ_{ml} est identique à son homologue $\Phi_{-m,l}$ au facteur $-e^{jm\varphi}$ près. Dès lors, on peut choisir d'utiliser le jeu de fonctions $\begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix}$ avec m entier positif, à la place du jeu de fonctions $e^{jm\varphi}$ avec m entier. Notons que dans ce cas, on introduit souvent le coefficient B_{ml} associé au sinus (A_{ml} étant alors associé au cosinus) pour remplacer le coefficient A_{ml} avec m négatif. On retrouve ainsi les expressions utilisées dans [18, 17].

La solution générale au problème défini dans Sect. 2.2.1 s'écrit donc :

$$p(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} R_{ml}^{(4)}(h, \xi_0) S_{ml}^{(1)}(h, \eta) [A_{ml} \cos(m\varphi) + B_{ml} \sin(m\varphi)] \quad (\text{II.2.26})$$

2.2.4 Utilisation des conditions limites

On va maintenant utiliser les conditions aux limites imposées par le problème pour trouver l'expression de A_{ml} dans Eq. (II.2.20). En utilisant Eq. (II.2.11), Eq. (II.2.12) et Eq. (II.2.7), on obtient :

$$v_0(\eta, \varphi) = \frac{1}{\rho j \omega} \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} \frac{\partial p}{\partial \xi}(\xi = \xi_0) \quad (\text{II.2.27})$$

en utilisant Eq. (II.2.26), on a :

$$v_0(\eta, \varphi) = \frac{1}{\rho j \omega} \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} R_{ml}^{(4)'}(h, \xi_0) S_{ml}^{(1)}(h, \eta) [A_{ml} \cos(m\varphi) + B_{ml} \sin(m\varphi)] \quad (\text{II.2.28})$$

Avec $R_{ml}^{(4)'} = \frac{dR_{ml}^{(4)}}{d\xi}$. En utilisant les propriétés d'orthogonalité de S_{ml} (Eq. (II.2.22)) et des fonctions trigonométriques, il vient alors :

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} v_0(\eta, \varphi) \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} S_{ml}^{(1)}(h, \eta) \cos(m\varphi) d\eta d\varphi &= \frac{1}{\rho j \omega} \frac{2}{d} \sqrt{\xi_0^2 - 1} R_{ml}^{(4)'}(h, \xi_0) \frac{2\pi}{\varepsilon_m} N_{ml} A_{ml} \\ \iint_{S_0} v_0(\eta, \varphi) \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} S_{ml}^{(1)}(h, \eta) \sin(m\varphi) d\eta d\varphi &= \frac{1}{\rho j \omega} \frac{2}{d} \sqrt{\xi_0^2 - 1} R_{ml}^{(4)'}(h, \xi_0) \pi N_{ml} B_{ml} \end{aligned}$$

avec $(\eta, \varphi)_m$ le nombre de Neumann (égal à 1 si $m = 0$, et 2 sinon) qui provient de l'intégration de $\cos(m\varphi)$ sur $[0, 2\pi]$. Remarquons que B_{ml} est nul pour $m = 0$, du fait du sinus dans l'intégrale, ce qui nous permet d'écrire de manière harmonieuse :

$$A_{ml} = \frac{\rho j \omega d}{2\sqrt{\xi_0^2 - 1} R_{ml}^{(4)'}(h, \xi_0) \frac{2\pi}{\varepsilon_m} N_{ml}} \iint_{S_0} v_0(\eta, \varphi) \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} S_{ml}^{(1)}(h, \eta) \cos(m\varphi) d\eta d\varphi \quad (\text{II.2.29})$$

$$B_{ml} = \frac{\rho j \omega d}{2\sqrt{\xi_0^2 - 1} R_{ml}^{(4)'}(h, \xi_0) \frac{2\pi}{\varepsilon_m} N_{ml}} \iint_{S_0} v_0(\eta, \varphi) \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} S_{ml}^{(1)}(h, \eta) \sin(m\varphi) d\eta d\varphi \quad (\text{II.2.30})$$

Notons que ces expressions sont valides pour toutes conditions de Neuman sur le sphéroïde.

En se plaçant dans le cas où la portion de sphéroïde vibre de manière constante et uniforme, i.e $v_0(\eta, \varphi) = V$, on obtient finalement la solution :

$$p(\xi, \eta, \varphi) = \frac{j h \rho c V}{2\pi \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \varepsilon_m R_{ml}^{(4)}(h, \xi) S_{ml}^{(1)}(h, \eta) \frac{[\tilde{I}_{ml}^s \cos(m\varphi) + \tilde{I}_{ml}^c \sin(m\varphi)]}{N_{ml} R_{ml}^{(4)'}(h, \xi_0)} \quad (\text{II.2.31})$$

avec :

$$\tilde{I}_{ml}^s = \iint_{S_i} \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} S_{ml}^{(1)}(h, \eta) \cos(m\varphi) d\eta d\varphi \quad (\text{II.2.32})$$

$$\tilde{I}_{ml}^c = \iint_{S_i} \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} S_{ml}^{(1)}(h, \eta) \sin(m\varphi) d\eta d\varphi \quad (\text{II.2.33})$$

qui est bien l'expression donnée par Boisvert dans [18, 17] au signe près, qui provient de la convention en $e^{-j\omega t}$ que l'on utilise.

Cette expression est finalement une somme des solutions élémentaires Eq. (II.2.16) qui sont pondérées par les intégrales \tilde{I}_{ml}^s et \tilde{I}_{ml}^c . Ces dernières sont donc l'excitation des solutions élémentaires par notre condition de Neumann. C'est d'ailleurs uniquement dans ces intégrales qu'apparaissent les conditions initiales sur le sphéroïde Eq. (II.2.11). La dérivée de $R_{ml}^{(4)}$ est présente car on impose une condition de Neumann. La projection de l'excitation est donc le rapport des coefficients \tilde{I}_{ml}^s et \tilde{I}_{ml}^c sur la quantité $R_{ml}^{(4)'}(h, \xi_0)$.

Les variables étant séparables, on peut calculer les intégrales \tilde{I}_{ml} comme le produit de deux intégrales simples. Dans le cas précis où la vibration est uniforme, l'intégrale sur la variable φ peut être trouvée analytiquement et sera donnée pour deux types de piston dans les sections suivantes. L'intégrale restante sur η est évaluée numériquement par la méthode des trapèzes.

3 Calcul pour un piston *carré* ou *circulaire*

Le calcul de l'excitation du sphéroïde représentée par les quantités \tilde{I}_{ml}^s et \tilde{I}_{ml}^c (Eqs. (II.2.32) et (II.2.33)) passe par une intégration sur la portion S_0 de l'Eq. (II.2.11). Dans cette section, on montre comment définir cette portion pour qu'elle soit carrée ou quasi-circulaire, puis le résultat de l'intégration sur ces portions.

3.1 Portions latérales quasi-rectangulaires

La solution la plus instinctive pour le choix des portions de sphéroïde est celle adoptée par Van Buren & Boisvert dans [18]. La portion vibrante est définie comme rectangulaire dans le plan (η, φ) , soit :

$$S_{\text{rect}} = \{\eta_{\text{low}} \leq \eta \leq \eta_{\text{up}}, \varphi_{\text{low}} \leq \varphi \leq \varphi_{\text{up}}\} \quad (\text{II.3.1})$$

Il faut donc faire l'intégration des Eqs. (II.2.32) et (II.2.33) sur ce domaine. On veut imposer à ces portions de sphéroïdes, modélisant les haut-parleurs, la même aire S_{HP} que ceux-ci. Le calcul de l'aire de ces portions se fait à l'aide de Eq. (II.2.8) :

$$\begin{aligned} S_{\text{rect}} &= \int_{\varphi_{\text{low}}}^{\varphi_{\text{up}}} \int_{\eta_{\text{low}}}^{\eta_{\text{up}}} \frac{d^2}{4} \sqrt{(\xi_0^2 - \eta^2)(\xi_0^2 - 1)} d\eta d\varphi \\ &= \frac{d^2}{4} \sqrt{\xi_0^2 - 1} \left[\varphi \right]_{\varphi_{\text{low}}}^{\varphi_{\text{up}}} \left[\frac{\xi_0^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}} \right) + \frac{\eta}{2\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}} \right]_{\eta_{\text{low}}}^{\eta_{\text{up}}} \end{aligned} \quad (\text{II.3.2})$$

On veut $S_{\text{rect}} = S_{\text{HP}}$. Les relations de passage Eq. (II.2.1) nous donnent $z = \frac{d}{2}\eta\xi$. Une manière simple est alors d'imposer $\sqrt{S_{\text{HP}}} = \frac{\xi_0 d}{2}(\eta_{\text{up}} - \eta_{\text{low}})$. Si l'on impose le centre de la portion comme confondu avec le centre du haut-parleur, on a complètement défini les bornes η_{up} et η_{low} . On ajuste ensuite les bornes de φ selon la formule Eq. (II.3.2) pour avoir $S_{\text{rect}} = S_{\text{HP}}$.

La visualisation d'une portion "rectangulaire" sur le sphéroïde est visible sur la Figure II.3.1

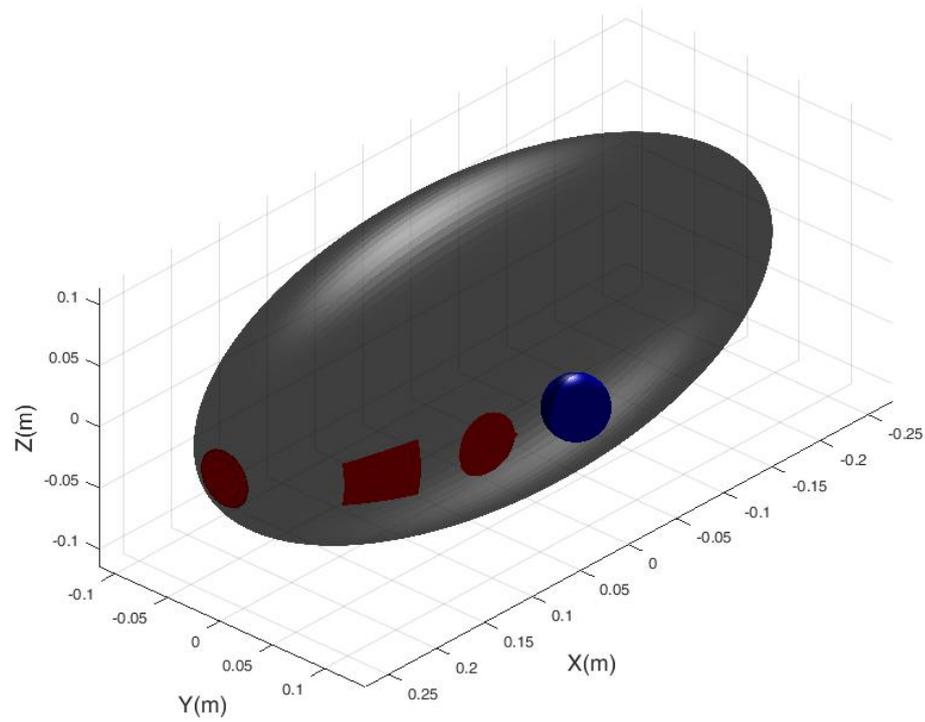


Figure II.3.1 – Exemple de formes de portions vibrantes (en rouge) sur le sphéroïde. En bleu, la construction géométrique pour obtenir une portion latérale circulaire. De gauche à droite : portion circulaire extrême, portion rectangulaire latérale, portion circulaire latérale et représentation d’une sphère (bleu) dont l’intersection avec le sphéroïde permet de paramétrer une portion circulaire latérale.

3.2 Portions quasi-circulaires

Ici, on définit des portions quasi-circulaires dont la géométrie correspondra mieux à la géométrie des haut-parleurs.

3.2.1 Portions quasi-circulaires extrémales

Si le piston se situe à une des extrémités du sphéroïde (i.e $\eta = \pm 1$), alors une portion vibrante définie comme rectangulaire dans le plan (η, φ) est directement quasi-circulaire du point de vue géométrique habituel, sous couvert que la variable φ varie de 0 à 2π . Il suffit donc d'appliquer la formule Eq. (II.3.2) pour trouver les bornes η_{up} ou η_{low} adéquates. Cet effet est illustré dans la figure Figure II.3.1.

3.2.2 Portions quasi-circulaires latérales

Pour obtenir un piston quasi-circulaire latéral, on considère l'intersection entre une sphère et une ellipse de révolution. Le contour ainsi obtenu représente le piston quasi-circulaire sur lequel on doit faire l'intégration.

Soit (x_0, y_0, z_0) le centre d'une boule pleine de rayon R_{HP} . On peut exprimer le centre dans les coordonnées sphéroïdales que l'on note alors $(\xi_0, \eta_0, \varphi_0)$

Le sphéroïde a alors pour équation :

$$\xi = \xi_0 \quad (\text{II.3.3})$$

et la boule pleine :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R_{HP}^2 \quad (\text{II.3.4})$$

L'intersection du sphéroïde et de la boule s'exprime par l'équation :

$$2(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta\eta_0) + (\eta - \eta_0)^2 - 2(\xi_0^2 - 1)\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \eta_0^2)} \cos(\varphi - \varphi_0) \leq \left(\frac{R_{HP}}{d/2}\right)^2 \quad (\text{II.3.5})$$

Le contour étant obtenu pour l'égalité de l'expression Eq. (II.3.5), on peut ainsi paramétrer le contour dans le plan (φ, η) par deux fonctions de type $\varphi = f(\eta)$ tel que :

$$\varphi(\eta) = \varphi_0 \pm \arccos \left(\frac{2(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta\eta_0) + (\eta - \eta_0)^2 - \left(\frac{R_{HP}}{d/2}\right)^2}{2(\xi_0^2 - 1)\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \eta_0^2)}} \right) \quad (\text{II.3.6})$$

pour le contour positif et négatif respectivement.

Il reste à calculer les intégrales \tilde{I}_{ml} en commençant par intégrer la variable φ telles que les bornes inférieures et supérieures soient les contours négatifs et positifs, fonctions de η , définis ci-dessus.

Si la vitesse est constante sur cette portion (hypothèse du piston), l'intégrale double sur ce domaine (variables η et φ) comporte qu'un seul terme trigonométrique en φ $\begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix}$ dans l'intégrande. L'intégrale se réduit à une intégrale simple sur η .

On obtient alors pour \tilde{I}_{ml}^s :

$$\tilde{I}_{ml}^s = \int_{\eta_{low}}^{\eta_{up}} \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} S_{ml}^{(1)}(h, \eta) \varphi_s(\eta) d\eta \quad (\text{II.3.7})$$

avec

$$\varphi_s(\eta) = \begin{cases} = \frac{2}{m} \cos(m\varphi^0) \sin \left[m \arccos \left(\frac{2(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta\eta_0) + (\eta - \eta_0)^2 - \left(\frac{R_{HP}}{d/2}\right)^2}{2(\xi_0^2 - 1)\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \eta_0^2)}} \right) \right] \\ \text{si } m \neq 0 \\ = 2 \arccos \left(\frac{2(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta\eta_0) + (\eta - \eta_0)^2 - \left(\frac{R_{HP}}{d/2}\right)^2}{2(\xi_0^2 - 1)\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \eta_0^2)}} \right) \\ \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.8})$$

et pour \tilde{I}_{ml}^c :

$$\tilde{I}_{ml}^c = \int_{\eta_{low}}^{\eta_{up}} \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} S_{ml}^{(1)}(h, \eta) \varphi_c(\eta) d\eta \quad (\text{II.3.9})$$

avec

$$\varphi_c(\eta) = \begin{cases} = -\frac{2}{m} \sin(m\varphi^0) \sin \left[m \arccos \left(\frac{2(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta\eta_0) + (\eta - \eta_0)^2 - \left(\frac{R_{HP}}{d/2}\right)^2}{2(\xi_0^2 - 1)\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \eta_0^2)}} \right) \right] \\ \text{si } m \neq 0 \\ = 0 \\ \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.10})$$

Les bornes η_{up} et η_{low} sont obtenues en trouvant les deux valeurs pour lesquelles le contour reprend la valeur φ_0 , i.e les deux valeurs de η qui satisfont l'équation :

$$\frac{2(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta\eta_0) + (\eta - \eta_0)^2 - \left(\frac{R_{HP}}{d/2}\right)^2}{2(\xi_0^2 - 1)\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \eta_0^2)}} = 1 \quad (\text{II.3.11})$$

Cette équation est résolue numériquement à l'aide d'une méthode de Nelder-Mead. Par la suite, on considère uniquement des portions de sphéroïdes à forme quasi-circulaire.

4 Critère de troncature des harmoniques sphéroïdales

Le but est de calculer le rayonnement décrit par l'Eq. (II.2.31). Ce rayonnement comporte une double somme infinie, traduisant le comportement modal du rayonnement. Pour limiter le calcul, on doit trouver un critère de troncature de cette somme, et ainsi éviter de calculer des harmoniques qui ne sont pas excitées.

4.1 Harmoniques sphéroïdales

On définit dans cette section les harmoniques sphéroïdales. On les visualise et on passe en revue quelques propriétés de celles-ci que l'on compare aux harmoniques sphériques. On peut proposer ainsi un critère intuitif de troncature pour le calcul de l'Eq. (II.2.31).

4.1.1 Définition

De manière similaire aux coordonnées sphériques, on retrouve dans la solution élémentaire Eq. (II.2.16) une partie $R_{\text{ml}}^{(4)}$ associée à la variable représentant la distance par rapport au centre du repère, et deux parties $S_{\text{ml}}^{(1)}$ et $e^{jm\varphi}$ associées aux variables angulaires. En rassemblant ces deux dernières, on peut donc définir des harmoniques sphéroïdales X_{ml} , analogues aux harmoniques sphériques usuellement notées Y_{ml} , que l'on notera alors :

$$X_{\text{ml}}(h, \eta, \varphi) = S_{\text{ml}}^{(1)}(h, \eta)e^{jm\varphi} \quad (\text{II.4.1})$$

Leur analogues sphériques sont définis avec les polynômes de Legendre P_{ml} :

$$Y_{\text{ml}}(\theta, \varphi) = P_{\text{ml}}(\cos \theta)e^{jm\varphi} \quad (\text{II.4.2})$$

Cette définition est la plus simple possible et cela facilitera notre étude. On trouve d'autres définitions dans la littérature, avec un coefficient qui permet de respecter la normalisation du produit scalaire.

4.1.2 Propriétés

L'expression de ces harmoniques sphéroïdales sont donc très proches des harmoniques sphériques. On constate cependant des différences notables. Ces deux classes d'harmoniques diffèrent par la partie associée à variable d'élévation (η en sphéroïdale et $\cos \theta$ en sphérique). La partie relative à la coordonnée φ étant identique pour les deux cas et valant $e^{jm\varphi}$.

Dépendance à la fréquence. La première constatation est que les harmoniques sphéroïdales dépendent de la fréquence réduite h , alors que les harmoniques sphériques sont indépendantes de la fréquence. Les harmoniques sphéroïdales apparaissent d'autant plus différentes des harmoniques sphériques que la distance entre les deux foyers de l'ellipse de référence est grande par rapport à la longueur d'onde. Une visualisation des premières lignes nodales des harmoniques sphériques est proposée sur la Figure II.4.1, ainsi que deux visualisations des harmoniques sphéroïdales pour deux fréquences réduites sur la Figure II.4.2 et Figure II.4.3. Puisqu'il s'agit finalement de comparer les deux parties relatives à l'élévation, on a tracé sur la Figure II.4.4, $S_{1,4}^{(1)}(h, \eta)$ pour différentes valeurs de h et son équivalent sphérique $P_{1,4}(\cos \theta)$.

On constate sur la Figure II.4.4 que plus la longueur d'onde est faible par rapport à la distance inter-focale, plus les zéros des harmoniques sphéroïdales se resserrent autour de $\eta = 0$. Plus la longueur d'onde est grande, plus ces zéros sont proches de ceux des harmoniques sphériques. Cela revient à considérer une distance inter-focale faible, et donc de faire tendre les coordonnées sphéroïdales vers les coordonnées sphériques.

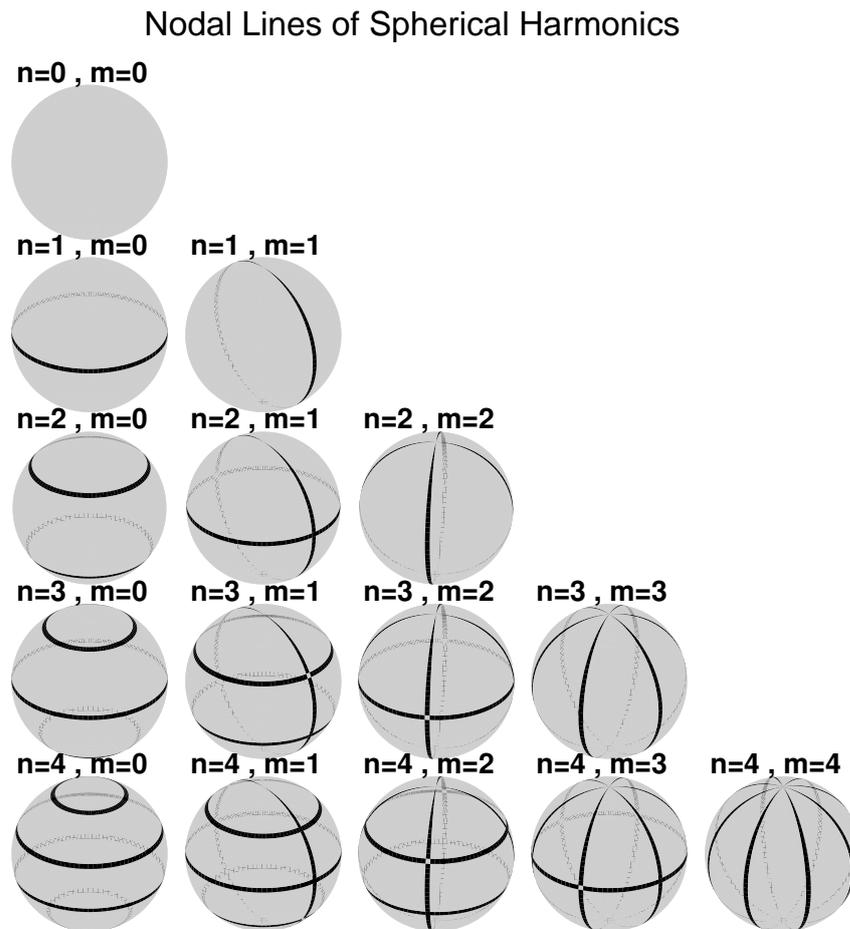


Figure II.4.1 – Lignes nodales des premières harmoniques sphériques.

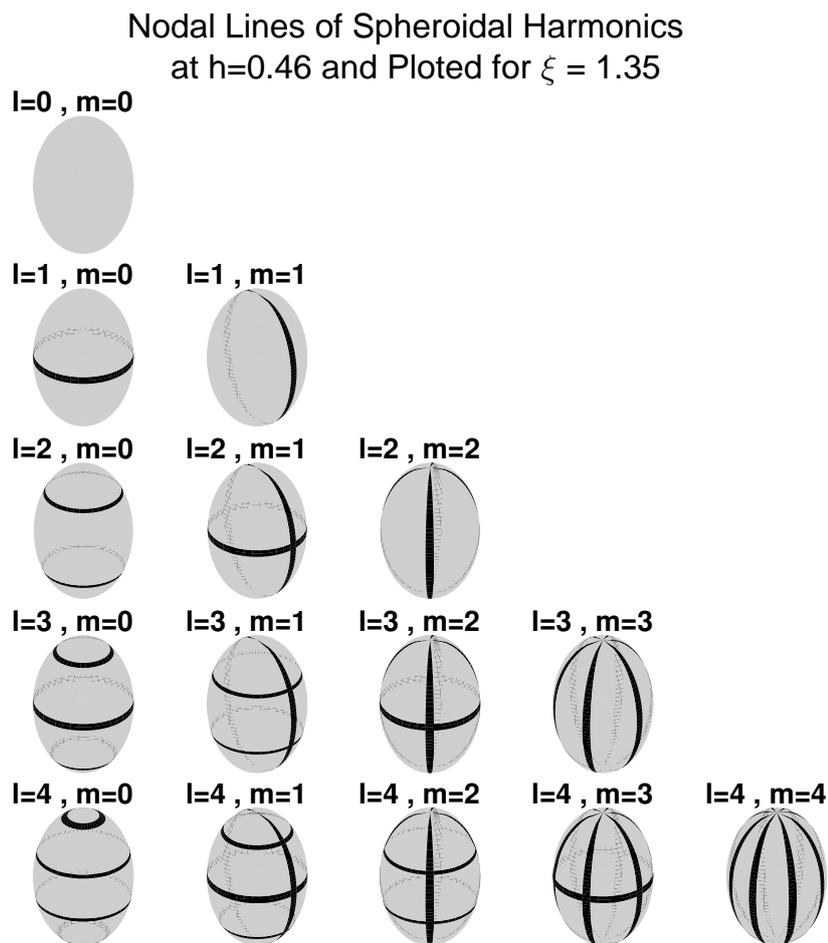


Figure II.4.2 – Lignes nodales des premières harmoniques sphéroïdales pour un rapport distance inter-focale sur longueur d'onde (fréquence réduite h) faible.

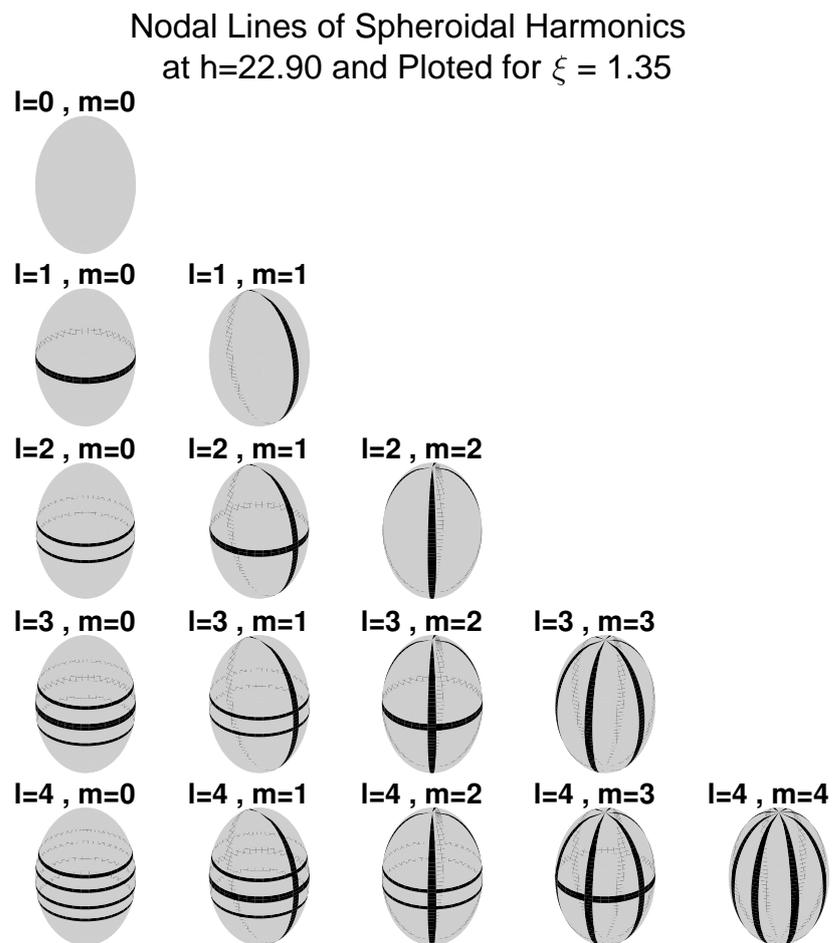


Figure II.4.3 – Lignes nodales des premières harmoniques sphéroïdales pour un rapport distance inter-focale sur longueur d'onde (fréquence réduite h) grand.

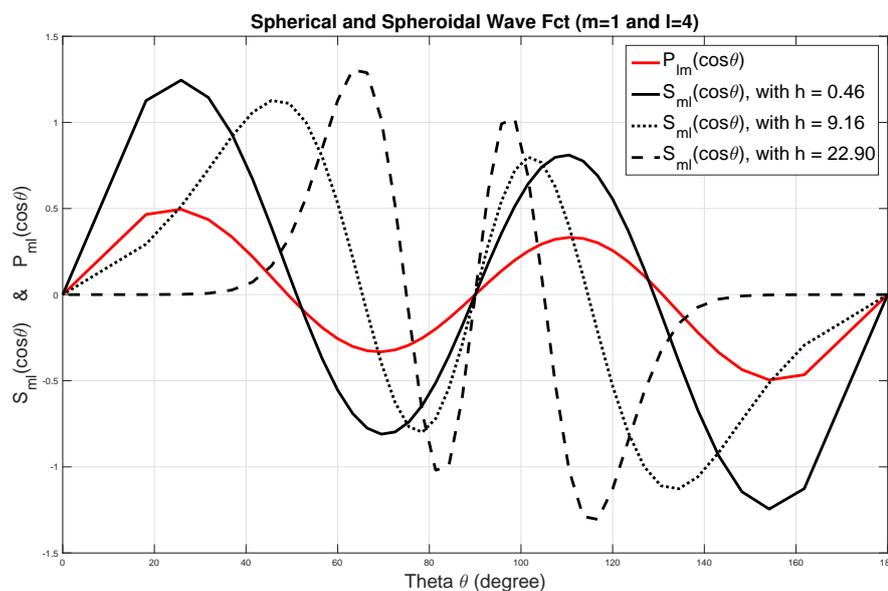


Figure II.4.4 – Comparaison de la composante d’élévation des harmoniques sphériques (polynôme de Legendre fonction de cosinus de l’élévation) et des harmoniques sphéroïdales (fonction $S_{ml}^{(1)}(h, \eta)$) pour différentes valeurs de la fréquence réduite h (rapport demi distance interfocale sur longueur d’onde) et pour $m = 1$ et $l = 4$. Les zéros des deux harmoniques sont proches pour une fréquence faible. Plus la fréquence est grande, plus les zéros des harmoniques sphéroïdales se rapprochent autour de $\eta = 0$.

En revanche, on constate sur les Figures II.4.1, II.4.2 et II.4.3 qu'elles comportent toujours le même nombre de lignes nodales, c'est-à-dire l lignes nodales par harmonique, dont m relativement à l'azimut φ et $l - m$ relativement à l'élévation (η ou θ). C'est en fait une conséquence directe du théorème de Sturm-Liouville ;

Orthogonalité. Pour les harmoniques sphériques, on montre la propriété suivante :

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} \overline{Y_{ml}(\theta, \varphi)} Y_{pq}(\theta, \varphi) \sin \theta d\varphi d\theta = \begin{cases} 2\pi N_{ml} & \text{si } m = p \text{ et } l = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.4.3})$$

Comme la variation élémentaire de surface sur une sphère s'écrit $dS = r^2 \sin \theta$, l'intégrale ci-dessus apparaît lors du calcul de la puissance rayonnée, ou de l'extrapolation de la pression rayonnée par une sphère à partir d'une sphère de taille différente. Ces calculs font intervenir l'intégrale sur la sphère d'un produit de deux doubles sommes de l'Eq. (II.2.21) (voir par exemple la définition de la puissance dans l'Eq. (4.2.1)). Ce calcul peut énormément se simplifier en développant ce produit et en faisant rentrer l'intégrale dans la somme obtenue. Tous les termes faisant intervenir le produit de deux harmoniques différentes seront alors nuls, et le résultat final sera exprimable comme une simple double somme (alors que l'on partait d'un produit de deux doubles sommes). Il est courant de dire que les harmoniques sphériques sont orthogonales sur une sphère.

Pour les harmoniques sphéroïdales, en utilisant Eq. (II.2.22), on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \overline{X_{ml}(h, \eta, \varphi)} X_{pq}(h, \eta, \varphi) d\varphi d\eta = \begin{cases} 2\pi N_{ml} & \text{si } m = p \text{ et } l = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.4.4})$$

Or la variation de l'élément de surface sur un sphéroïde (le premier terme de l'Eq. (II.2.8)) n'est pas du tout l'unité, ce qui nous fait perdre la propriété précédente. De manière contre-intuitive, les harmoniques sphéroïdales ne sont pas orthogonales sur un sphéroïde. Un avertissement récent en ce sens pour les utilisateurs non avertis a été formulé par Lowes [78]. En acoustique, une opération importante rendue impossible est l'extrapolation de la pression rayonnée par un sphéroïde donné, à partir de la pression rayonnée par un autre sphéroïde. Cette extrapolation est couramment utilisée dans le modèle sphérique, notamment pour la théorie de l'holographie acoustique en champ proche (voir [156] par exemple).

L'interprétation est la suivante : lorsqu'on considère une géométrie sphérique, il est équivalent de considérer la pression rayonnée par une sphère de rayon r_1 au nombre d'onde k_1 et celle rayonnée par une autre sphère de rayon r_2 au nombre d'onde k_2 , si on a l'égalité $r_1 k_1 = r_2 k_2$. Mathématiquement, cette propriété provient de la fonction de Hankel sphérique dans l'expression de cette pression, qui est une fonction unidimensionnelle d'argument kr . En revanche pour le cas sphéroïdal, le paramètre de distance représente l'inverse de l'excentricité de l'ellipse. La géométrie change donc en fonction du paramètre de distance, celui-ci n'étant pas un simple paramètre d'échelle. On comprend aisément qu'un sphéroïde fortement excentrique n'aura pas le même comportement qu'un

sphéroïde quasiment sphérique.

Néanmoins, le premier terme du gradient de l'Eq. (II.2.7) compense la variation en η l'élément de surface sur un sphéroïde. Cette coïncidence nous permet quand même d'exploiter la relation d'orthogonalité donnée par Eq. (II.4.4) dans le calcul de la puissance rayonnée (voir Sect. 4.2).

4.1.3 Court-circuit acoustique et critère de troncature

Cas sphérique. Lorsqu'on utilise l'indexation de l'Eq. (II.2.21) (indexation sphérique), la troncature se fait uniquement sur l'indice n . Cet indice représente le nombre total de lignes nodales de l'harmonique considérée (voir Figure II.4.1). Pour un calcul à un nombre d'onde k donné, l'essentiel de l'énergie est contenu dans les harmoniques d'ordre n tel que $n < kr + \varepsilon$ [20], avec r le rayon de la sphère émettrice et ε un nombre résiduel faible. Boucher considère également que les harmoniques dont le facteur de rayonnement est le plus fort sont celles pour lesquelles on a $n = kr$ [20]. On constatera dans la Figure II.4.5 que ce n'est pas tout à fait vrai, même si cela ne remet pas en cause l'interprétation physique. On les appellera par abus de langage "harmoniques dominantes" dans la suite.

L'interprétation physique est la suivante [153] : premièrement, les coefficients du développement en harmoniques sphériques de l'Eq. (II.2.20) peuvent être interprétés comme une moyenne pondérée par la forme de l'harmonique du déplacement radial initial sur la surface d'une sphère (voir Eq. (II.2.29) et Eq. (II.2.30)). Lorsque le coefficient obtenu est non nul, alors la contribution de cette harmonique au rayonnement est celle d'une sphère pulsante de rayon r dont le déplacement radial initial a une forme identique à celle décrite par l'harmonique.

Deuxièmement, le nombre kr représente le ratio du périmètre et la longueur d'onde. En effet, en considérant qu'une révolution complète de la sphère se traduit par la distance $\Delta = 2\pi r$, avec la relation $\lambda = 2\pi/k$, on a $\Delta/\lambda = kr$.

Maintenant, on peut affirmer que les harmoniques dominantes à un nombre d'onde k sont telles que $n = kr$. En effet, la famille d'harmoniques d'ordre n décrit des harmoniques possédant n lignes nodales, et donc associées à des distances moyennes entre ses parties positives et négatives d'environ $\Delta/2n$ (dans la réalité, on constate que c'est un peu moins, voir Sect. 4.2.3). Ces harmoniques rayonnent de manière optimale si cette distance est égale à la demi-longueur d'onde, traduisant ainsi le phénomène de coïncidence spatiale, c'est-à-dire si $\Delta/2n = \lambda/2$ ou encore $n = kr$.

On peut aussi affirmer que le rayonnement d'une harmonique d'ordre $n > kr + \varepsilon$ est faible, car les différentes contributions de ses parties positives et négatives s'annulent entre elles par le phénomène du court-circuit acoustique. Cette fois, la distance entre ses parties positive et négative devient plus petite que la longueur d'onde. L'air poussé par les parties positives est aspiré par les parties négatives à une distance petite devant la demi-longueur d'onde, ce qui a pour conséquence des mouvements d'air en champ proche principalement, avec peu de rayonnement vers le champ lointain. En revanche, nous n'avons pas a priori sur une harmonique d'ordre $n < kr$, et donc celle-ci est considérée comme rayonnante par défaut.

Cas sphéroïdal. Dans le cas sphéroïdal, l'indexation utilisée considère une troncature sur les deux indices m et l comme dans l'Eq. (II.2.20). En réarrangeant cette double

somme comme pour le cas sphérique (Eq. (II.2.21)), on peut appliquer exactement le même raisonnement et définir ainsi un ordre L maximum en fonction de la fréquence pour laquelle les harmoniques ne rayonnent quasiment plus. Il suffit de considérer le demi-grand-axe a de l'ellipse à la place du rayon r de la sphère. Le sphéroïde étant plus allongé, les court-circuits seront d'autant plus forts que le demi-petit axe b est plus petit que le demi-grand-axe a , engendrant des distances caractéristiques (celle du dipôle par exemple) dans cette direction plus faible. Le cas sphérique fait ici figure de majoration, si on considère la sphère de rayon a .

Ce critère est cependant sous-optimal car il propose une troncature en comparant la longueur d'onde à la plus grande dimension du sphéroïde sans tenir compte de la plus petite dimension. On perdrait ainsi beaucoup d'intérêt à ne pas utiliser l'asymétrie du problème en calculant des harmoniques non excitées. Ainsi, on considère le nombre de lignes nodales relatives aux deux demi-axes de l'ellipse. On rappelle que l'harmonique X_{ml} a m lignes nodales associées au demi-petit axe b et $l - m$ lignes nodales associées au demi-grand-axe a (voir Figure II.4.2). Remarquons que les lignes associées à m découpent le sphéroïde en quartiers, alors que celles associées à l le découpent en tranches. On cherche donc la distance moyenne entre chaque partie négative et positive en fonction de m et l selon la direction d'azimut ou d'élévation. On considère comme distance de référence les trajets les plus longs associés à chaque demi-axe de l'ellipse.

Concernant le petit axe, le plus grand trajet est bien évidemment le cercle de rayon b , on pose donc $\Delta_m = 2\pi b$. S'il y a m lignes nodales en azimut, alors la distance entre chaque partie positive et négative dans cette direction sera $\Delta_m/2m$. Il y aura donc des courts-circuits si $m > kb + \varepsilon_b$.

Concernant le grand-axe, le plus grand trajet est le périmètre de l'ellipse. On utilise alors l'approximation donnée par l'Eq. (II.2.5) ou bien l'encadrement $\pi(a+b) < \Delta_l < 4(a+b)$. S'il y a $l - m$ lignes nodales en élévation, il y aura des courts-circuits si $\Delta_l/2(l-m) < \lambda/2$ soit pour $2(l-m) > k(a+b)$ en utilisant la borne minimum de l'encadrement. On peut aussi utiliser l'approximation de Δ_l si le sphéroïde a une excentricité marquée, pour un critère plus précis.

On résume cette approche comme suit :

Critère de troncature : En considérant un ellipsoïde pas trop excentrique, de demi-grand-axe a et de demi-petit axe b rayonnant en champ lointain à la fréquence telle que le nombre d'onde soit k , il est suffisant de se limiter les sommes de l'Eq. (II.2.20) aux bornes suivantes :

- $M = kb + \varepsilon_b$
- $L - M = k \frac{a+b}{2} + \varepsilon_a$

Note : La notation ε_a et ε_b est standard dans la littérature, bien que ε_a et ε_b soient de l'ordre de quelques entiers. On peut raffiner ce critère en utilisant l'expression Eq. (II.2.5) dans le cas d'un sphéroïde à l'excentricité marquée. Dans notre application, prendre $\varepsilon_a = \varepsilon_b = 4$ est suffisant pour aller à des ordres tels que $L = 50$.

Remarque sur la validité du critère :

- Ces critères sont établis en considérant les lignes nodales en azimut et en élévation indépendamment. En vérité, l'interaction est plus complexe et il est tout à fait

possible que certaines harmoniques rentrant dans ce critère ne rayonnent pas. En revanche, on s'attend à ce que notre critère soit optimal si une harmonique incluse dans ce critère est telle que $m = 0$ ou $m = l$. Cette constatation est vérifiée dans la partie suivante.

- Parce que les harmoniques sphéroïdales dépendent de la fréquence, et que leur zéros se rapprochent de $\eta = 0$ avec celle-ci, la distance entre les lignes nodales peut s'éloigner fortement du périmètre de l'ellipse divisé par le nombre de zéros. Or c'est cette distance sur laquelle est basée notre critère. Cet effet est visible sur la Figure II.4.3. Cependant, dans la pratique, on constate que la répartition de ces zéros est régulière pour les harmoniques critiques, i.e les harmoniques qui comportent $l - m$ lignes nodales lorsque la fréquence est telle que $l - m \approx k \frac{a+b}{2}$. L'absence de régularité affecte donc uniquement les ordres inférieurs et peut être compensée avec les harmoniques critiques, ce qui ne remet pas en cause le raisonnement. Autrement dit, même si les lignes nodales associées à $l - m$ dans la Figure II.4.3 semblent être resserrées autour de $\eta = 0$ en haute-fréquence, notre critère nous demandera d'aller chercher une harmonique pour laquelle il y aura suffisamment de lignes nodales associées à $l - m$ pour que celles-ci soit réparties sur toute la surface du sphéroïde. Cette effet se recoupe avec la remarque précédente. C'est aussi cohérent avec le fait que les X_{ml} forment une base de fonctions, et doivent donc permettre de décrire des motifs complexes aux extrémités du sphéroïde. Comme l'explique Williams dans [156] (p.209), les harmoniques sont naturellement construites de façon à compenser la différence de nature entre l'angle azimutal et l'angle d'élévation.
- Rappelons enfin que ce critère se base sur un raisonnement en champ lointain, et sera donc difficilement applicable en champ proche. Nous retrouvons cette même caractéristique en sphérique, où la prévalence des ordres élevés en champ proche est connue.

4.2 Puissance rayonnée et facteur de rayonnement modal

Cette section a pour but d'étudier les modes rayonnants et non-rayonnants du sphéroïde. Les expressions de la puissance et du facteur de rayonnement en coordonnées sphéroïdales sont établies ici, en s'inspirant des démonstrations en coordonnées sphériques. L'étude du facteur de rayonnement modal permet de vérifier le critère établi dans la partie précédente.

4.2.1 Puissance rayonnée

Définition : Par définition, la puissance rayonnée est considérée à partir d'une surface fermée S_f telle que :

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2} \iint_{y \in S_f} \Re \left\{ p(y) \langle \vec{v}^*(y), \overrightarrow{dS_f} \rangle \right\}$$

Pour exploiter au mieux les coordonnées sphéroïdales, on choisit une surface $S_f = \{\xi = \xi_f\}$. On obtient comme élément de surface, en utilisant Eq. (II.2.8) :

$$dS_f = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \sqrt{(\xi_f^2 - \eta^2)(\xi_f^2 - 1)} d\eta d\varphi e_{\vec{\xi}}$$

La vitesse normale à une telle surface est donnée par Eq. (II.2.27) soit finalement, après simplification :

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2\rho\omega} \frac{d}{2} (\xi_f^2 - 1) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \Re \left\{ j p(\xi_f, \eta, \varphi) \frac{\partial p}{\partial \xi}(\xi_f, \eta, \varphi) \right\} d\eta d\varphi$$

Comme annoncé dans la Sect. 4.1.2, on peut utiliser l'orthogonalité des harmoniques sphéroïdales dans le calcul de cette expression car l'expression de l'élément de surface compense la norme du vecteur normal. On obtient, en utilisant Eq. (II.4.4) :

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{\rho\omega V^2}{2\pi N_{\text{ml}}} \frac{\xi_f^2 - 1}{\xi_0^2 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\|\tilde{I}_{\text{ml}}^s\|^2 + \|\tilde{I}_{\text{ml}}^s\|^2}{\|R_{\text{ml}}^{(4)'}(h, \xi_0)\|^2} \text{Im} \left\{ R_{\text{ml}}^{(4)}(h, \xi_f) \overline{R_{\text{ml}}^{(4)'}(h, \xi_f)} \right\}$$

En considérant l'égalité $R_{\text{ml}}^{(4)}(h, \xi) = R_{\text{ml}}^{(1)}(h, \xi) - jR_{\text{ml}}^{(2)}(h, \xi)$, avec $R_{\text{ml}}^{(1)}$ et $R_{\text{ml}}^{(2)} \in \mathbb{R}$ et la relation du Wronskien donnée par Flammer [42] :

$$R_{\text{ml}}^{(1)}(h, \xi) \frac{dR_{\text{ml}}^{(2)}(h, \xi)}{d\xi} - R_{\text{ml}}^{(2)}(h, \xi) \frac{dR_{\text{ml}}^{(1)}(h, \xi)}{d\xi} = \frac{1}{h(\xi^2 - 1)} \quad (\text{II.4.5})$$

on montre :

$$\text{Im} \left\{ R_{\text{ml}}^{(4)}(h, \xi) \overline{R_{\text{ml}}^{(4)'}(h, \xi)} \right\} = \frac{1}{h(\xi^2 - 1)}$$

soit finalement :

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{c\rho V^2}{2\pi N_{\text{ml}}} \frac{1}{\xi_0^2 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\|\tilde{I}_{\text{ml}}^s\|^2 + \|\tilde{I}_{\text{ml}}^s\|^2}{\|R_{\text{ml}}^{(4)'}(h, \xi_0)\|^2}$$

L'expression que l'on obtient ne dépend pas de la surface d'observation. La puissance rayonnée par le sphéroïde est classiquement proportionnelle au carré de l'excitation. D'une manière générale, la quantité $\|\tilde{I}_{\text{ml}}^s\|^2 + \|\tilde{I}_{\text{ml}}^s\|^2$ est une quantité finie sous couvert que la distribution initiale de vitesse le soit aussi. En conséquence, si la quantité $\|R_{\text{ml}}^{(4)'}(h, \xi)\|^2$ tend vers ∞ pour une certaine combinaison de m , l et h , on peut alors en déduire que le mode (m, l) en question ne rayonne pas à cette fréquence. Cette notion peut être formalisée par le facteur de rayonnement ou l'impédance modale, définis dans la partie suivante.

4.2.2 Facteur modal de rayonnement

Le facteur modal de rayonnement permet de caractériser si un mode rayonne ou non en champ lointain en s'affranchissant de la forme de l'excitation. On va retrouver une notion analogue à la notion d'impédance de rayonnement : le facteur de rayonnement.

Définition : Le facteur de rayonnement σ est défini comme le rapport de la puissance rayonnée et de la vitesse quadratique de la surface multipliée par l'impédance caractéristique du milieu, soit :

$$\sigma(\omega) = \frac{\Pi(\omega)}{\rho c \iint_{y \in S_0} \|v_0(y)\|^2 dS}$$

Avec un calcul similaire au précédent, on obtient :

$$\sigma(\omega) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{(\xi_0^2 - 1) \|R_{ml}^{(4)'}(h, \xi_0)\|^2} \varepsilon_m \left(\|\tilde{I}_{ml}^s\|^2 + \|\tilde{J}_{ml}^s\|^2 \right)}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \varepsilon_m \left(\|\tilde{I}_{ml}^s\|^2 + \|\tilde{J}_{ml}^s\|^2 \right)} \quad (\text{II.4.6})$$

et on peut donc définir le facteur modal de rayonnement associé à chaque mode par :

$$\sigma_{ml}^{\xi_0} = \frac{1}{(\xi_0^2 - 1) \|R_{ml}^{(4)'}(h, \xi_0)\|^2}$$

Cette quantité nous permet d'étudier le fait qu'un mode est rayonnant ou non-rayonnant. On utilise parfois l'impédance modale de rayonnement Z_{ml} qui, tous calculs faits, peut être obtenue par l'expression $Z_{ml} = \rho c \sigma_{ml}$. Ces quantités sont équivalentes dans notre cas, bien que les démonstrations soient un peu différentes. L'utilisation de la puissance de rayonnement plutôt que la notion d'impédance présente l'avantage d'être un peu moins abstraite pour l'interprétation.

Ce facteur n'est pas défini quand le sphéroïde est une sphère, car la fonction $R_{ml}^{(4)'}$ n'existe pas dans ce cas là. En revanche, il peut être étendu par le facteur modal de rayonnement d'une sphère, qui s'exprime classiquement par [156] :

$$\sigma_{ml}^{r_0} = \frac{1}{(kr_0)^2 \|h_1'(kr_0)\|^2}$$

4.2.3 Modes rayonnants et modes non-rayonnants

Les facteurs de rayonnements modaux sphériques et sphéroïdaux sont examinés ici. Les facteurs de rayonnement modaux sphériques sont présentés dans la Figure II.4.5 pour n allant de 1 à 10. Les fonctions R_{ml} étant des fonctions 2D (Sect. 4.1.2), les facteurs de rayonnement modaux sphéroïdaux le sont aussi et on les représente donc un par un. On choisit ici de tracer ces fonctions en fonction de ka et kb plutôt que h et ξ pour pouvoir vérifier le critère établi dans la Sect. 4.1.3.

On présente ainsi les facteurs $\sigma_{10,10}, \sigma_{0,10}$ et $\sigma_{10,10}$ dans les Figures II.4.6, II.4.7 et II.4.8. Ces facteurs sont ceux associés à des harmoniques comportant 10 lignes nodales, i.e elles sont sur la même ligne en reprenant le rangement de la figure Figure II.4.2. Ils correspondent en sphérique à un seul facteur de rayonnement modal : σ_{10} , qui est la dernière courbe de la Figure II.4.5. Cette courbe permet d'ailleurs de tracer la ligne située en $ka = kb$ des facteurs de rayonnement sphéroïdaux.

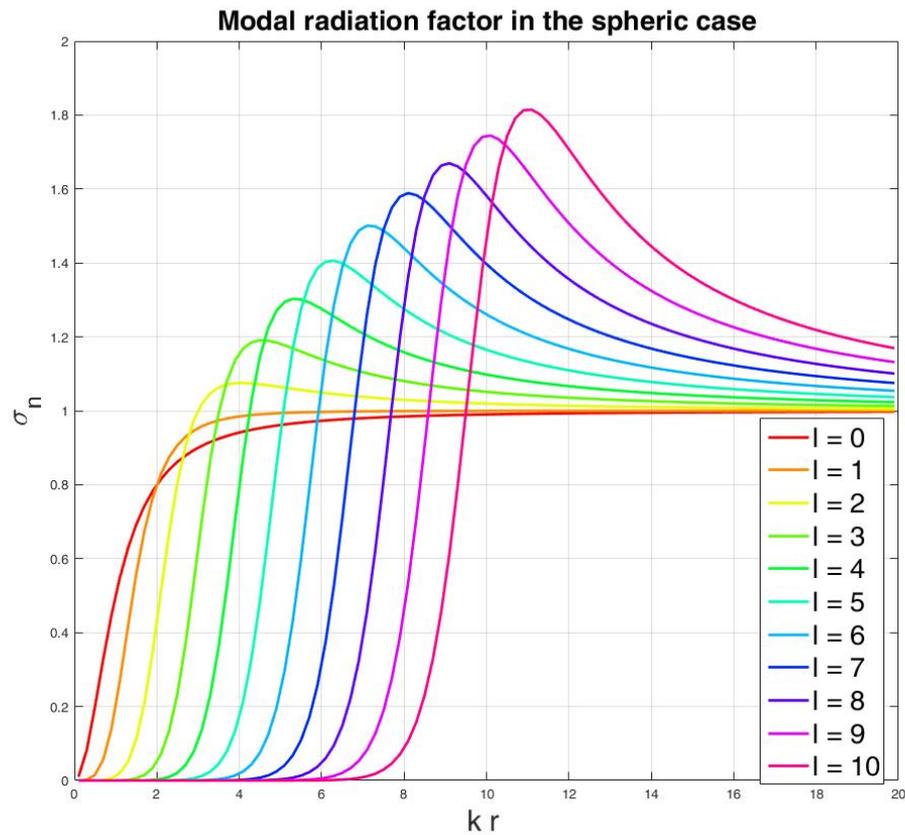


Figure II.4.5 – Facteurs de rayonnement modaux des harmoniques sphériques $l = 0 \dots 10$ en fonction du produit du nombre d'onde par le rayon de la sphère. Exemple d'interprétation : les harmoniques associées à $l=10$ ne rayonnent pas lorsque $kr = 6$, car le facteur associé est nul pour cette valeur. En revanche, elles rayonnent pour $kr \geq 8$. Le critère classique affirme qu'elles rayonnent pour $kr \geq 10$. La différence entre le critère et la valeur constatée est compensée par la valeur ε et vient de l'approximation de la distance moyenne entre les lignes nodales.

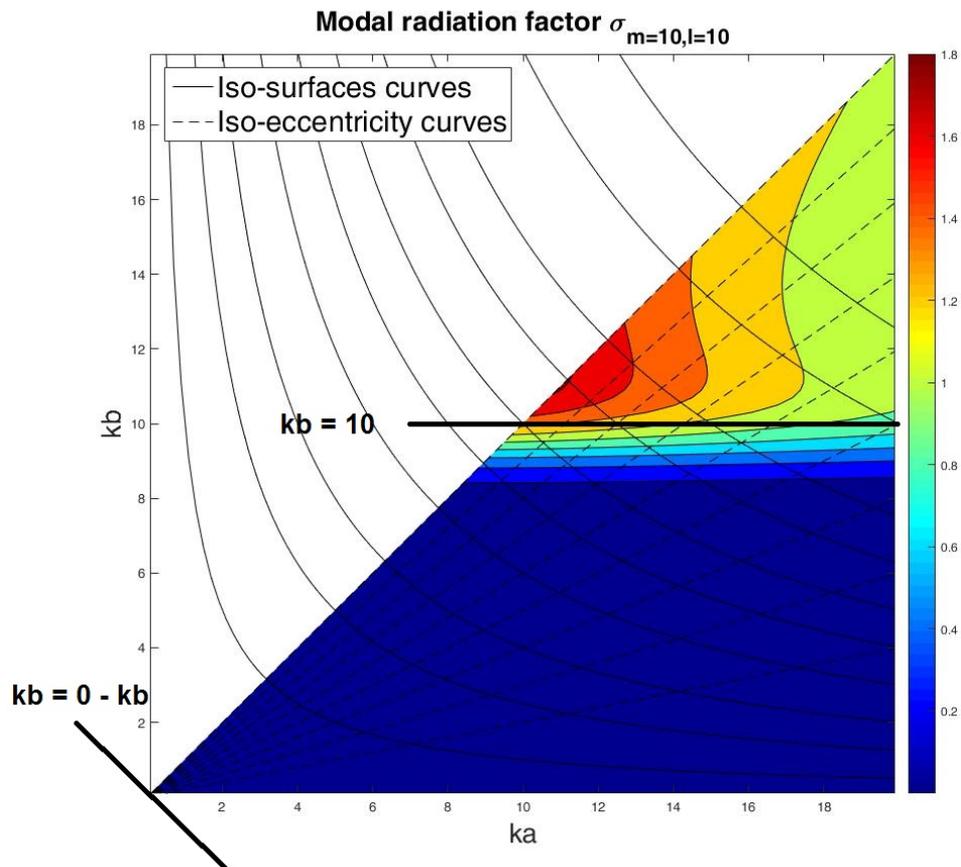


Figure II.4.6 – Facteur de rayonnement modal de l’harmonique sphéroïdale $(m, l) = (10, 10)$ en fonction du produit du nombre d’onde par les des deux demi-axes de l’ellipse. Le critère développé affirme que l’harmonique est rayonnante si la fréquence est telle qu’on se situe au dessus des deux droites représentées. On constate une assez bonne cohérence.

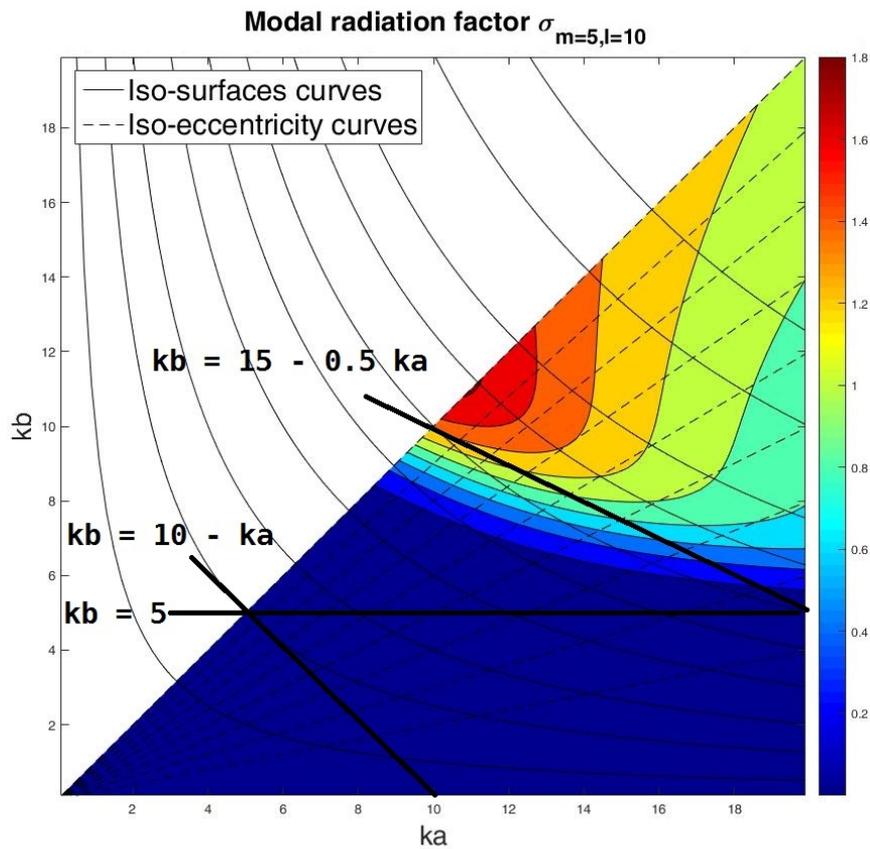


Figure II.4.7 – Facteur de rayonnement modal de l’harmonique sphéroïdale $(m, l) = (5, 10)$ en fonction du produit du nombre d’onde par les des deux demi-axes de l’ellipse. Le critère développé affirme que l’harmonique est rayonnante si la fréquence est telle qu’on se situe au dessus des deux droites représentées dans la partie basse de la figure. Le critère est ici sous-optimal, on a également tracé la droite empirique de l’Eq. (II.4.7).

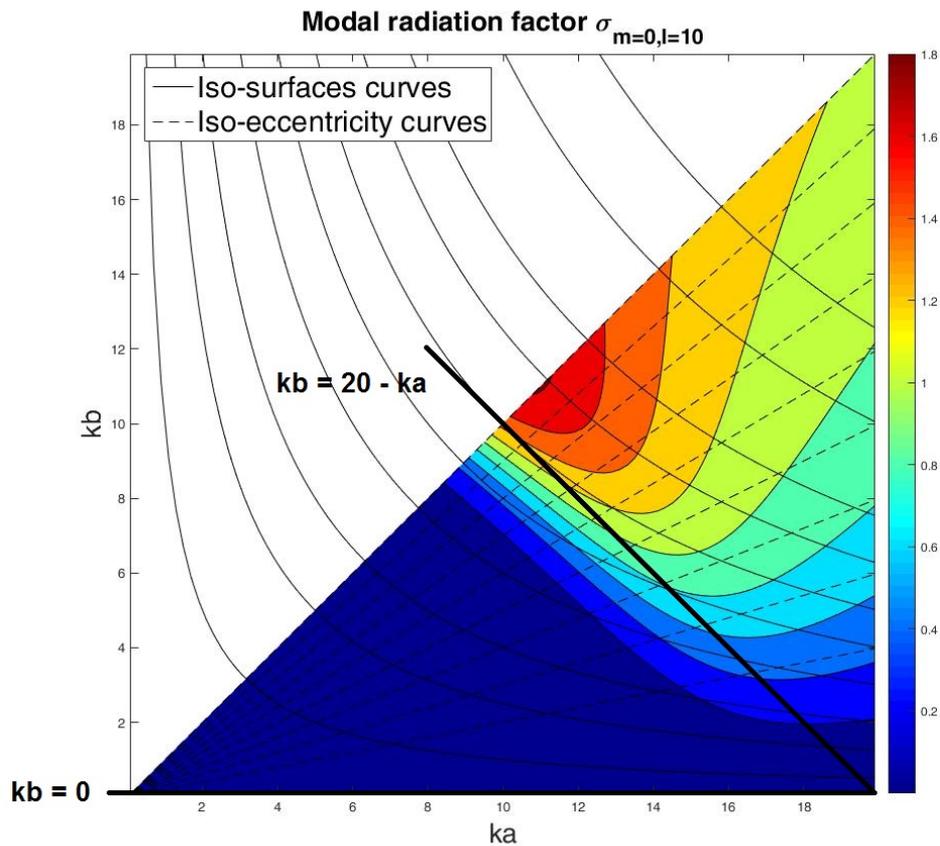


Figure II.4.8 – Facteur de rayonnement modal de l’harmonique sphéroïdale $(m, l) = (0, 10)$ en fonction du produit du nombre d’onde par les des deux demi-axes de l’ellipse. Le critère développé affirme que l’harmonique est rayonnante si la fréquence est telle qu’on se situe au dessus des deux droites représentées. On constate une assez bonne cohérence.

Facteur de rayonnement sphérique :

- On retrouve bien l'interprétation que l'on a faite dans la Sect. 4.1.3. Si on se place à un kr donné, le facteur de rayonnement n'est pas nul pour les modes inférieurs à $kr + \varepsilon$ mais nul pour les modes supérieurs. On constate d'ailleurs que ε varie légèrement avec les modes. Ainsi, si on se place à $kr = 2$, le mode 3 rayonne encore un peu mais pas le mode 4. Alors que si on se place à $kr = 6$, il faut attendre le mode 9 pour ne plus avoir de rayonnement. La valeur de ε est donc passée 1 à 2 avec l'augmentation de n . En remarquant que la longueur d'onde varie avec l'inverse du nombre d'onde, on constate que plus ce nombre grandit, plus les variations de longueur d'onde sont faibles pour une variation k équivalente. La densité de mode augmente donc avec la longueur d'onde, ce qui a pour conséquence d'activer plus de modes proche de kr à mesure que la fréquence augmente. Cet effet est la raison d'être de ε , dont l'expression n'est pas explicite. Pour se donner un ordre d'idée, on constate que $\varepsilon \approx 10$ pour $n = 100$.
- On constate que le rayonnement est maximum pour une valeur de kr légèrement supérieure au mode considéré. Le phénomène de coïncidence spatiale est donc atteint pour une longueur d'onde légèrement inférieure à celle attendue. Notre interprétation du phénomène de coïncidence spatiale est basée sur la distance que parcourt une onde pour faire une révolution parfaite de la sphère. Or, tous les autres trajets sur la sphère ont une distance plus courte que la circonférence de la sphère. Pour ces trajets, la distance caractéristique du court-circuit acoustique est plus faible, ce qui correspond à une fréquence plus élevée. On peut donc s'attendre à ce que le rayonnement maximum soit atteint pour une valeur plus élevée que kr . En essence, cette erreur représente l'approximation que l'on a fait en disant que la distance moyenne entre les lignes nodales sur la sphère est d'environ $\Delta/2n$ à la Sect. 4.1.3
- Les facteurs de rayonnement sont tous nuls quand la fréquence tend vers 0. On retrouve l'effet bien connu du *Baffle step response* affirmant qu'une enceinte est acoustiquement transparente en très basse-fréquence. Ainsi, le rayonnement en basse-fréquence dépend uniquement de la forme de la source et non de la forme de l'enceinte.

Facteur de rayonnement sphéroïdal : Les remarques que l'on donne s'appuient sur les 3 figures de ce manuscrit mais ont été vérifiées pour les 40 premières harmoniques. On conjecture qu'il est valide pour toutes les harmoniques.

- D'un manière générale on constate que plus le sphéroïde est excentrique (voir courbes pointillées), moins il rayonne par rapport à un sphéroïde de surface équivalente (voir courbes pleines). À surface équivalente, une sphère rayonne plus efficacement qu'un sphéroïde. Cet effet est prévisible en considérant les court-circuits acoustiques de la Sect. 4.1.3.
- On cherche maintenant à vérifier le critère que l'on a développé à la Sect. 4.1.3. On s'attend à trouver une très bonne correspondance du critère pour les cas $m = 0$ et $m = l$. En regardant la Figure II.4.6 correspondant à $m = 0$, on constate que notre critère est bien optimal. La prédiction de modes rayonnants, si on se situe au dessus de la courbe $kb = 10$ est vérifiée. La Figure II.4.8 correspondant à $m = 10$ montre aussi que le critère est vérifié. La déviation du facteur de rayonnement modal avec

la courbe $kb = 2 \times (10 - 0) - ka$, lorsque le sphéroïde devient excentrique est dû à l'approximation du périmètre de l'ellipse. On considère le critère quasi-optimal.

- Sur la Figure II.4.7 est représenté le facteur modal de radiation lorsqu'il y a 5 lignes nodales en azimut et 5 lignes nodales en élévation. Notre critère nous dit que les modes situés sous les courbes $kb = 10 - ka$ et $kb = 5$ sont non-rayonnants. On constate que nos deux critères sont ici sous optimaux bien que toujours corrects. On a aussi tracé une autre courbe, issue de la formule empirique suivante :

$$kb = -\frac{l-m}{l}ka + 2l - m \quad (\text{II.4.7})$$

Cette formule correspond à notre critère pour le cas $m = 0$ ou $m = l$. Additionnellement, on vérifie que pour n'importe-quel m et l inférieur à 50, les modes rayonnants sont toujours situés au dessus de cette courbe de manière quasi-optimale (i.e à l'approximation du périmètre du sphéroïde près). On n'a cependant pas pu établir cette expression à partir de formules exactes, elle reste donc une constatation empirique.

En conclusion, on constate que le critère de troncature développé à la Sect. 4.1.3 est cohérent avec l'examen empirique de facteur de rayonnement modal. Il semble quasi-optimal pour les cas $m = 0$ et $m = l$ et sous-optimal pour les autres cas. On est cependant capable de donner un critère quasi-optimal de manière empirique pour ces derniers. En pratique, les harmoniques sont calculées de manière itérative, ce qui implique souvent de calculer ces harmoniques non-rayonnantes, même si elles sont exclues du critère. On considère donc, au vu de notre méthode de calcul, que ce critère est satisfaisant.

Remarque : lien entre puissance rayonnée et pression. L'expression de la puissance rayonnée et du facteur de rayonnement ne dépend pas de la distance d'observation. Cependant, le critère de troncature est basé sur une interprétation qui ne fonctionne qu'en champ lointain. On sait en effet que plus on est en champ proche, plus le nombre d'harmoniques nécessaires pour exprimer la pression est grand (voir par exemple [156]). Cette apparente contradiction provient du fait que la puissance peut s'exprimer en champ lointain par :

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2\rho c} \iint_{y \in S_f} \Re \{ p(y)^2 dS_f \}$$

Si on est assez loin de la source, l'onde sphérique ressemble à une onde plane et la pression varie de manière identique à la vitesse. La puissance rayonnée ne dépend que de celle-ci et donc les harmoniques nécessaires pour exprimer les deux quantités sont les mêmes. En revanche, plus on se rapproche de la source, plus la vitesse a tendance à être en quadrature avec la pression. Lorsqu'on regarde l'expression de la puissance rayonnée Eq. (4.2.1), le produit de la pression par la vitesse tend à devenir imaginaire, en particulier pour des harmoniques d'ordres faibles, qui possède peu de lignes nodales. En considérant le cas limite d'une surface d'observation qui tend vers la surface $\xi = \xi_0$, on comprend bien que c'est la décomposition de la vitesse imposée sur la surface (i.e les I_{ml}^s et I_{ml}^s) qui déterminera le nombre d'harmoniques. On peut s'en convaincre en prenant l'équation de Kirchhoff-Helmholtz et on décomposant les expressions de la pression et de la vitesse sur les harmoniques. A titre d'exemple, la représentation d'une source ponctuelle (i.e le champ

de vitesse est une distribution de Dirac), nécessiterait toutes les harmoniques.

L'étude du facteur de rayonnement nous permet de constater la validité de notre critère. Les fonctions sphéroïdales étant beaucoup plus compliquées que les fonctions sphériques, il est plus complexe de montrer ce critère intuitif de manière mathématique. La voie traditionnelle du passage à la limite nous fait retomber sur le cas sphérique si $\xi \rightarrow \infty$ et sur un cas très singulier si $\xi \rightarrow 1$. Une étude de ce dernier cas est donnée par [31] mais les expressions sont trop complexes pour prouver ce comportement asymptotique.

5 Mise-en-œuvre : choix du sphéroïde

Il reste maintenant à choisir la forme optimale de l'ellipse de révolution. Plusieurs choix sont possibles selon les contraintes que l'on se fixe. Il s'agit dans tous les cas d'optimiser la forme de l'ellipse par rapport à la forme de l'enceinte. On présente ici quelques-unes des possibilités. On considère plusieurs cas, selon si le ou les haut-parleurs sont en position latérale ou en position extrême. Dans tous les cas, on considère uniquement le cas des haut-parleurs quasi-circulaires. On considère également que l'enceinte est un pavé droit qui a les demi-dimensions : (x_d, y_d, z_d) pour un volume total $V_d = 8x_d y_d z_d$.

5.1 Caractéristiques recherchées

D'une manière générale, une ellipse de révolution est une surface à 2 degrés de liberté. Typiquement, le couple (a, b) formé par les demi-axes de l'ellipse la caractérise complètement. Afin d'exploiter pleinement les coordonnées sphéroïdales, on préfère l'utilisation du couple (ξ, d) . Fixer 2 contraintes indépendantes pour le sphéroïde revient à fixer ce couple, sous couvert que la solution existe.

Ces contraintes peuvent prendre principalement 2 formes :

1. Les contraintes géométriques ou contraintes directes. On impose des propriétés géométriques au sphéroïde, communes à l'enceinte. Par exemple, on peut imposer un volume ou une surface identique à celle de l'enceinte.
2. Les contraintes de minimisation, ou contraintes indirectes. On cherche alors les paramètres qui minimisent une quantité donnée. Cela peut être une minimisation de distance entre le sphéroïde et le pavé droit par exemple. Ce sont des compromis, puisqu'il n'existe pas de solution exacte aux contraintes données.

Ces contraintes doivent bien évidemment être définies en fonction de l'enceinte, mais pas uniquement. Il est aussi important de prendre en compte la position et la forme des portions vibrantes du sphéroïde. La portion vibrante devra être au plus proche de la position originale du haut-parleur pour éviter les artefacts dus à la propagation du son. De même, il n'est pas interdit de prendre en compte la fréquence pour chaque optimisation. Dans le cas du modèle sphéroïdal, c'est le calcul des fonctions d'onde qui est lourd et celles-ci dépendent de la fréquence. Ainsi, changer de sphéroïde à chaque fréquence n'augmente pas le coût de calcul.

En revanche, dans le cas où l'on souhaite prédire le rayonnement de plusieurs haut-parleurs sur une même enceinte, il peut être intéressant d'utiliser le même sphéroïde pour deux haut-parleurs différents. Dans ce cas, on s'épargne un calcul de fonctions d'onde.

5.2 Expression des contraintes

On exprime dans cette partie les contraintes indépendantes que l'on considère pour choisir le sphéroïde. La solution finale étant donnée par une combinaison de deux de ces contraintes.

5.2.1 Contraintes directes

Deux contraintes directes sont considérées ici : une contrainte de volume et une contrainte de surface. En imposant un volume V_0 ou une surface S_0 , on impose une relation entre d et ξ_0 . En utilisant Eq. (II.2.3) et Eq. (II.2.4) on obtient :

$$d = 2 \left(\frac{3}{4\pi} \frac{V_0}{\xi_0(\xi_0^2 - 1)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{II.5.1})$$

et

$$d = 2 \sqrt{\frac{S_0/2\pi}{\xi_0^2 - 1 + \xi_0^2 \sqrt{\xi_0^2 - 1} \arcsin(1/\xi_0)}} \quad (\text{II.5.2})$$

Dans le cas où on utilise une seule de ces contraintes en association avec une contrainte indirecte (voir section ci-dessous), la minimisation portera uniquement sur le paramètre ξ_0 .

Si on souhaite combiner ces deux contraintes (i.e définir un sphéroïde par son volume et sa surface), il faut trouver ξ_0 solution de l'équation obtenue en combinant les équations Eq. (II.5.1) et Eq. (II.5.2). Elle sera trouvée numériquement.

5.2.2 Contraintes indirectes

On considère maintenant une contrainte indirecte : la minimisation de distance entre un disque (i.e haut-parleur) du pavé droit (i.e enceinte) et sa projection orthogonale sur l'ellipse. Pour mesurer la distance entre ces deux surfaces, on considère le volume inter-surface défini par la projection, qui s'exprime alors simplement sous la forme d'une intégrale.

On suppose que le centre de l'ellipse est confondu avec le centre du pavé droit, et que le grand-axe z de l'ellipse est confondu avec le grand-axe z du pavé droit. On distingue deux cas, selon si le disque est situé sur une des faces extrême (sur une face perpendiculaire à l'axe du sphéroïde ou de la barre de son) ou en position latérale.

Position latérale

Considérons un disque en position latérale. Ce disque S_{hp} a pour centre $\mathbf{O}_{\text{HP}} = \{x_{0\text{hp}}, y_{0\text{hp}}, z_{0\text{hp}}\}$ et un rayon R_{hp} . Ce disque est situé sur une face du pavé définie par $x = x_{0\text{hp}}$. Un point $\{x_{\text{hp}}, y_{\text{hp}}, z_{\text{hp}}\}$ appartenant à ce disque S_{hp} vérifie :

$$\{x_{\text{hp}}, y_{\text{hp}}, z_{\text{hp}}\} = \begin{cases} x_{\text{hp}} = x_{\text{HP}} \\ (y_{0\text{hp}} - y_{\text{hp}})^2 + (z_{0\text{hp}} - z_{\text{hp}})^2 \leq R_{\text{hp}}^2 \end{cases} \quad (\text{II.5.3})$$

On considère maintenant son projeté orthogonal (i.e selon l'axe perpendiculaire à ce disque) sur le sphéroïde (d, ξ_0) . Cette projection $\{x_{P_x}, y_{P_x}, z_{P_x}\}$ est telle que :

$$\{x_{P_x}, y_{P_x}, z_{P_x}\} = \begin{cases} x_{P_x} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 (\xi_0^2 - 1) + z_{hp}^2 \left(\frac{1}{\xi_0^2} - 1\right)} - y_{hp}^2 \\ y_{P_x} = y_{hp} \\ z_{P_x} = z_{hp} \end{cases} \quad (\text{II.5.4})$$

On définit donc le volume inter-surface selon la projection par :

$$V_{hp-P} = \iint_{S \in S_{hp}} |x_{hp} - x_{P_x}| dS \quad (\text{II.5.5})$$

On cherchera à minimiser ce volume en jouant sur les paramètres (d, ξ_0) . On peut, par symétrie, faire le même raisonnement pour un haut-parleur situé sur les faces latérales telles que $y = Cte$. On peut aussi étendre ce critère à d'autres formes qu'un disque, en considérant n'importe quelle surface située sur une face du pavé droit, en particulier à la totalité de cette face. Dans ce dernier cas, il suffit alors que les paramètres y_{hp} et z_{hp} parcourent toute la surface de la face considérée du pavé droit.

Position extrême.

Considérons cette fois un disque en position extrême. Ici, le disque est sur une face du pavé définie par $z = z_{0hp}$. La définition de cette surface est analogue à l'Eq. (II.5.3). Sa projection est donnée par :

$$\{x_{P_z}, y_{P_z}, z_{P_z}\} = \begin{cases} x_{P_z} = x_{HP} \\ y_{P_z} = y_{HP} \\ z_{P_z} = \xi_0 \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 (\xi_0^2 - 1) - (x_{hp}^2 + y_{hp}^2)}{\xi_0^2 - 1}} \end{cases} \quad (\text{II.5.6})$$

et donc le volume à minimiser est défini par :

$$V_{hp-P} = \iint_{S \in S_{hp}} |z_{hp} - z_{P_z}| dS \quad (\text{II.5.7})$$

5.3 Combinaisons de contraintes et visualisation des sphéroïdes obtenus

On se propose de considérer pour la suite 4 "mélanges" de contraintes que l'on comparera avec les mesures dans Sect. 6.2. Une visualisation des formes obtenues est disponible sur les Figures II.5.1 et II.5.2

M1 : Même volume et même surface. On impose ici le même volume et la même surface au sphéroïde que l'enceinte considérée. Lorsqu'on fait cette optimisation, le haut-parleur que l'on considère n'est pas pris en compte. Cette optimisation a donc l'avantage, en cas de multiples haut-parleurs sur l'enceinte, de présenter un coût de calcul plus faible.

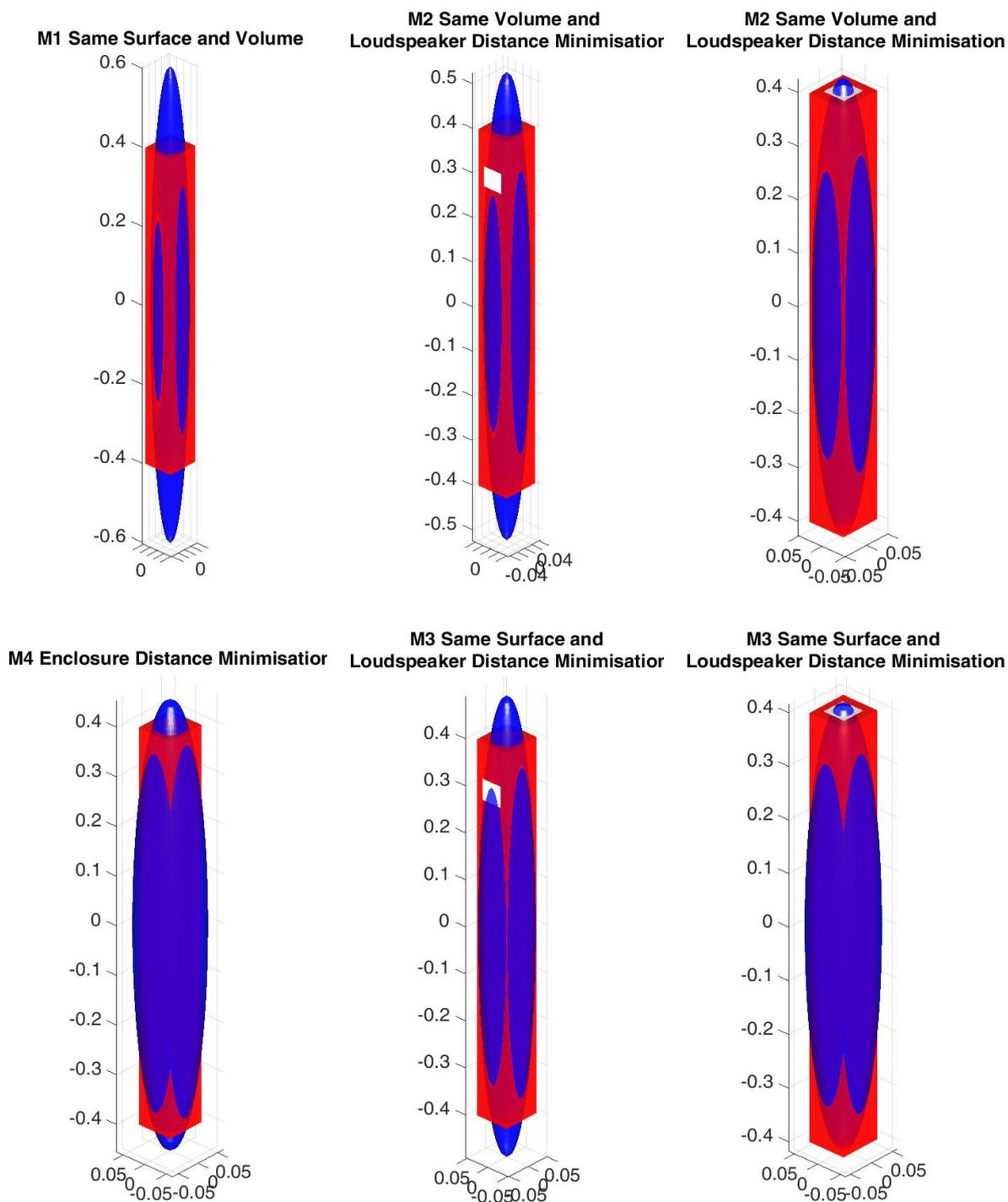


Figure II.5.1 – Exemple de 6 sphéroïdes obtenus pour les 4 mélanges de contraintes et pour l'enceinte A (voir Annexe A). En rouge, la forme de l'enceinte réelle et en bleu, le sphéroïde obtenu. Si un haut-parleur est pris en compte (cas M2 et M3), alors la surface associée est en blanc. Dans ces derniers cas, on présente un cas avec un haut-parleur en position latérale et un cas avec un haut-parleur en position extrême.

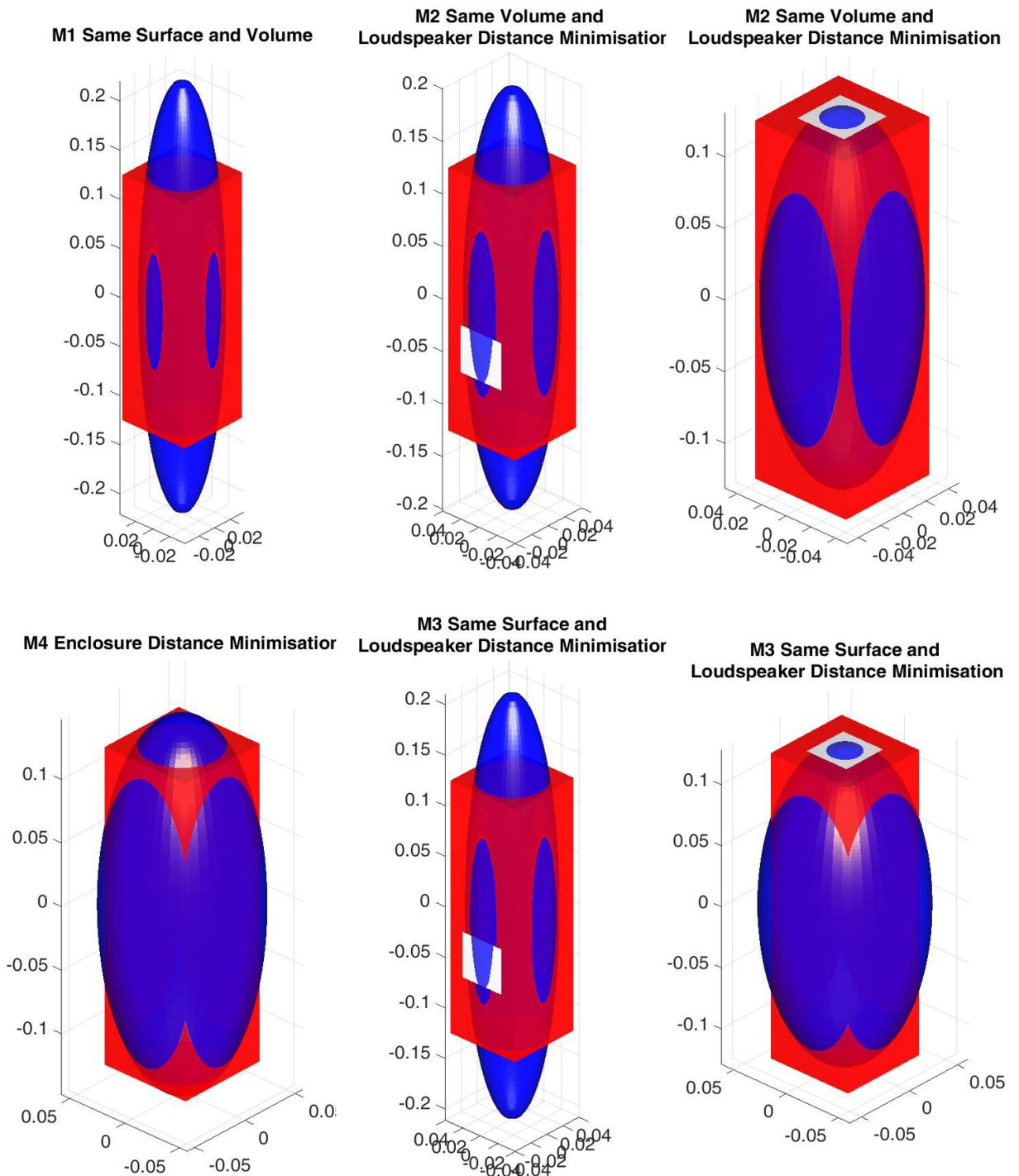


Figure II.5.2 – Exemple de 6 sphéroïdes obtenus pour les 4 mélanges de contraintes et pour l'enceinte B (voir Annexe A). En rouge, la forme de l'enceinte réelle et en bleu, le sphéroïde obtenu. Si un haut-parleur est pris en compte (cas M2 et M3), alors la surface associée est en blanc. Dans ces derniers cas, on présente un cas avec un haut-parleur en position latérale et un cas avec un haut-parleur en position extrême.

M2 : Même volume et minimisation de distance au haut-parleur. On impose le même volume au sphéroïde. On ajoute une contrainte de minimisation de distance au haut-parleur, comme définie dans la Sect. 5.2.2. Remarquons que, par souci de simplicité, on a pris comme surface d'intégration un carré de coté égal au diamètre du haut-parleur plutôt que sa forme circulaire (i.e le disque). Ces surfaces sont visibles en blanc sur les Figures II.5.1 et II.5.2. La surface considérée est donc légèrement plus grande que la surface réelle. Le résultat est similaire.

M3 : Même surface et minimisation de distance au haut-parleur. Idem mais en considérant cette fois la surface identique.

M4 : Minimisation de distance aux faces de l'enceinte. Enfin, on considère une dernière optimisation qui se base uniquement sur la contrainte de minimisation de distance. L'idée est cette fois de trouver le sphéroïde qui minimise la distance projetée de toute la surface de l'enceinte sur le sphéroïde. Cela revient à faire en sorte que les carrés blancs visibles sur Figures II.5.1 et II.5.2 recouvrent toute l'enceinte rouge. Mathématiquement, on note S_{enc} la surface de l'enceinte et on cherche (ξ, d) tels que :

$$(\xi, d) \text{ tq } \min_{\xi, d} \left\{ \iint_{S \in S_{\text{enc}}} |z - z_{\text{Pz}}| dS + \iint_{S \in S_{\text{enc}}} |x - x_{\text{Px}}| dS + \iint_{S \in S_{\text{enc}}} |y - y_{\text{Py}}| dS \right\} \quad (\text{II.5.8})$$

Remarquons que cette optimisation n'est pas une minimisation du volume entre le sphéroïde et l'enceinte rectangulaire, car on considère à chaque fois le projeté orthogonal d'une face de l'enceinte sur le sphéroïde. Ce mélange M4 présente les mêmes avantages que le mélange M1 en terme de coût de calcul pour de multiples haut-parleurs.

6 Résultats

On présente dans cette partie les résultats de la modélisation de manière neutre et sans interprétation. On insiste sur un point en particulier pour chaque visualisation. La première section vérifie le critère de troncature. La seconde section examine l'influence des différentes optimisations de la forme du sphéroïde. Les dernières sections sont dédiées à la comparaison du rayonnement obtenu avec le modèle sphéroïdal et la simulation éléments finis, tant dans le plan horizontal que vertical. Enfin, une dernière section compare le temps de calcul des deux modèles.

6.1 Convergence de la solution

On cherche ici à constater expérimentalement le critère de troncature établi dans la partie Sect. 4.1.3. On considère pour cela un sphéroïde de dimensions $a=0.5$ m et $b=0.1$ m. On considère la valeur absolue de la pression rayonnée par une source ponctuelle selon l'expression donnée par l'Eq. (II.2.26). La source est située à $(\xi = \xi_0, \eta = 0.6, \varphi = 0)$. La fréquence est 2200 Hz, soit une longueur d'onde de 15cm dans l'air. On trace le rayonnement obtenu sur un cercle dans le plan défini par la source et l'axe du sphéroïde. Les récepteurs sont situés à 11m. Il y a 72 récepteurs équirépartis sur le cercle. On se situe donc bien dans le champ lointain.

Pour un tel problème, l'application numérique du critère donne $L - M = 14 + \varepsilon_a$ et $M = 4 + \varepsilon_b$. Les résultats sont montrés Figure II.6.1. On constate que, dans la pratique, la convergence est atteinte pour $\varepsilon_a = \varepsilon_b = 2$ dans ce cas précis. Dans ce manuscrit, on est allé jusqu'à des ordres atteignant $L - M = 40$, pour un maximum constaté de $\varepsilon_a = 4$.

6.2 Forme du sphéroïde

Pour tester les différentes formes obtenues par les combinaisons de contraintes définies dans la Sect. 5.3 et visibles sur les Figures II.5.1 et II.5.2, on se place à la fréquence où l'on a constaté la plus importante influence de la forme de l'enceinte dans le cadre de notre application. Plus précisément, c'est la fréquence dans l'intervalle étudié pour laquelle les rayonnements des 4 sphéroïdes (définis dans la Sect. 5.3) et de la référence diffèrent le plus, en prenant en compte les enceintes A et B uniquement (voir Annexe A). Pour celles-ci, c'est autour de la fréquence 3000 Hz. On donne dans les Tables II.6.1 et II.6.2 les paramètres obtenus pour ces sphéroïdes. On trace le rayonnement obtenu sur un cercle dans le plan défini par la source et l'axe du sphéroïde. Les récepteurs sont situés à 11 m. Il y a 72 récepteurs équirépartis sur le cercle. Les résultats sont visibles sur la Figure II.6.2

Table II.6.1 – Caractéristiques des sphéroïdes obtenues pour l'enceinte A dans le cas du haut-parleur numéro 2, visibles sur la Figure II.5.1

Paramètres	M1	M2	M3	M4
a	0.603	0.525	0.490	0.454
b	0.0432	0.0463	0.053	0.0656
d	1.204	1.046	0.975	0.900
ξ_0	1.0025	1.0039	1.0058	1.0105

Table II.6.2 – Caractéristiques des sphéroïdes obtenues pour l'enceinte B dans le cas du haut-parleur numéro 2, visibles sur la Figure II.5.2

Paramètres	M1	M2	M3	M4
a	0.220	0.201	0.210	0.147
b	0.0384	0.0402	0.0402	0.0576
d	0.434	0.394	0.413	0.271
ξ_0	1.015	1.020	1.018	1.086

On constate que pour les deux enceintes, les directivités changent très peu en fonction des différentes optimisations par rapport à l'écart entre celles-ci et le modèle éléments finis (BEM). Ces écarts relatifs peuvent s'expliquer par la valeur des paramètres obtenus selon les différentes optimisations, qui restent très proches entre eux. En particulier lorsque l'on regarde les valeurs de d et ξ_0 , qui sont très proches pour les 3 premiers mélanges,

Directivités obtenues pour différente troncature Fréquence 2200Hz, $a=0.5\text{m}$ et $b=0.1\text{m}$

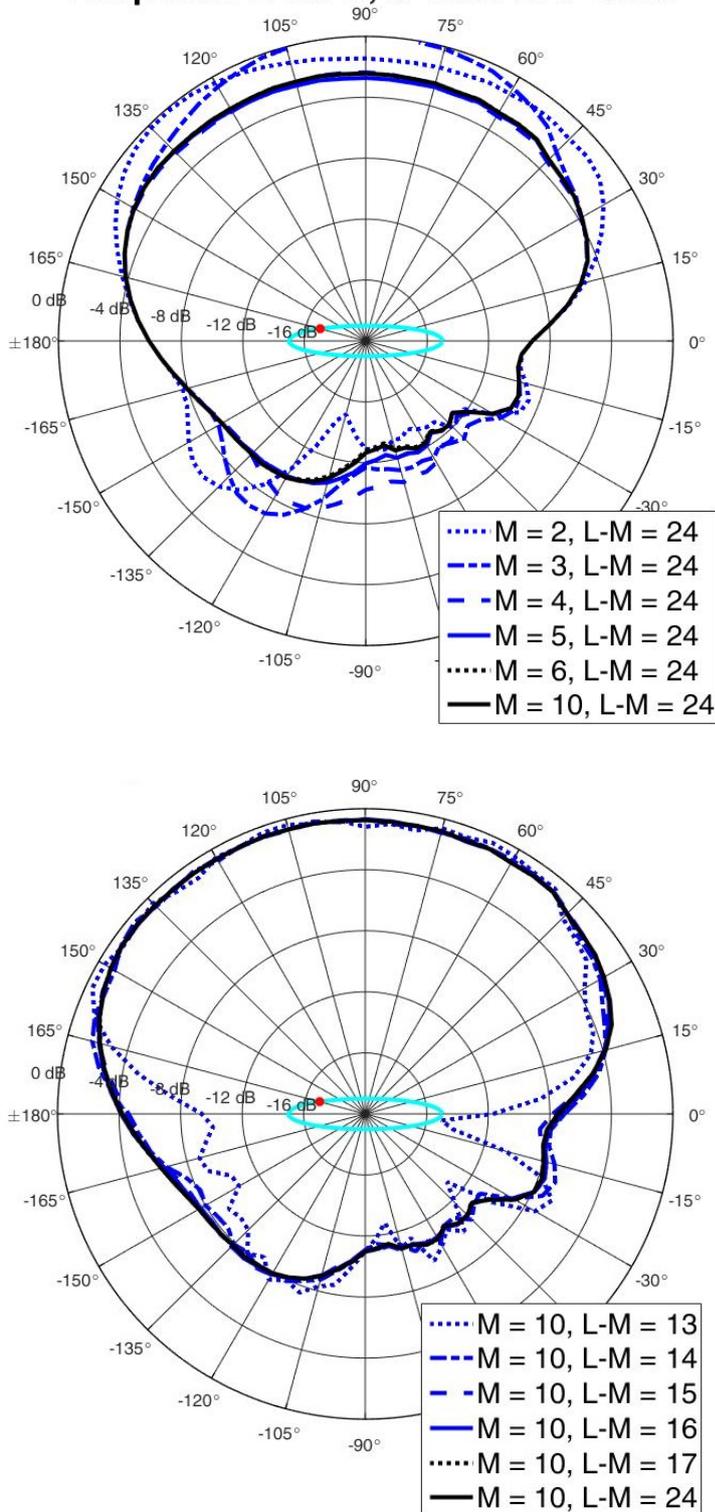


Figure II.6.1 – Directivités obtenues en fonction de la troncature. Le critère de la Sect. 4.1.3 donne $L - M = 14 + \varepsilon_a$ et $M = 4 + \varepsilon_b$. Dans la pratique, la convergence est atteinte pour $\varepsilon_a = \varepsilon_b = 2$ dans ce cas là. La forme de l'ellipse est représentée en cyan et la position de la source par un point rouge.

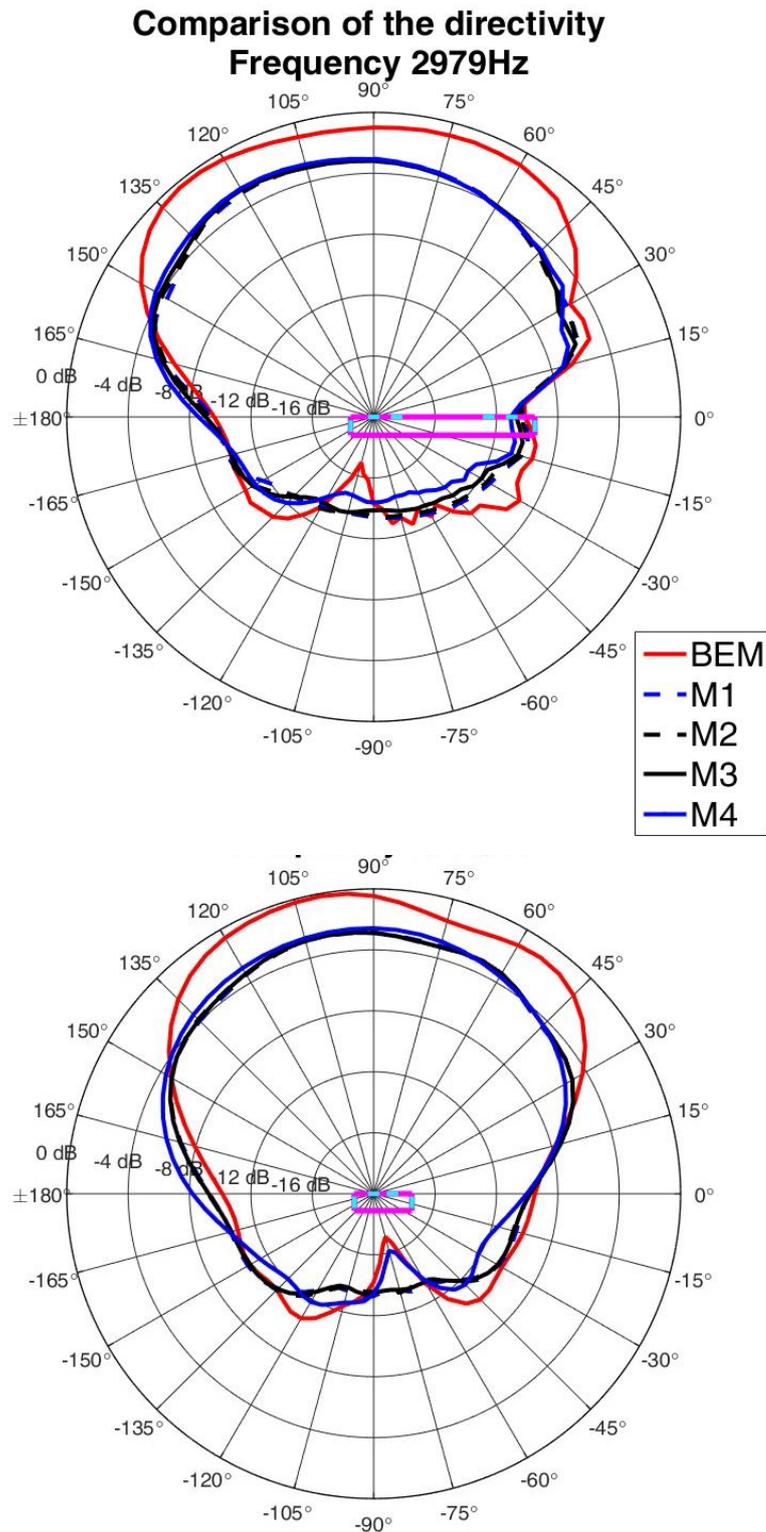


Figure II.6.2 – Directivités obtenues pour les différents mélanges définis dans la Sect. 5.3 pour l’enceinte A puis l’enceinte B respectivement. On considère le haut-parleur numéro 2 dans les deux cas. On constate que les directivités changent très peu en fonction des différentes optimisations par rapport à l’écart entre celles-ci et le modèle d’éléments finis. On retiendra dans la suite le mélange 4 uniquement.

et qui produisent des directivités quasiment “traits sur traits”. Le cas M4 est celui qui diffère le plus des 3 autres et on constate par ailleurs que les directivités associées diffèrent également. Toutefois, les différences restent faibles par rapport à l’écart de chaque cas à la référence BEM, ce qui nous amène à conclure qu’il est indifférent d’utiliser un modèle ou un autre pour la modélisation d’une barre de son par un sphéroïde, d’un point de vue précision de la prédiction.

6.3 Directivité horizontale

Pour examiner la pertinence du modèle sphéroïdal en fonction de la fréquence, on trace les directivités obtenues dans le plan horizontal pour les enceintes A et B avec le modèle éléments finis, ainsi qu’avec le modèle sphéroïdal M4. On utilise pour cela la méthode de visualisation décrite dans l’annexe Annexe B. Les récepteurs sont situés à 1.1 m dans le plan défini par la source et l’axe de la barre de son. Il y a 72 récepteurs équirépartis sur le cercle. On considère le cas des haut-parleurs 1 et 2 pour l’enceinte A et uniquement le haut-parleur 2 dans le cas de l’enceinte B. On considère les 6 fréquences suivantes : 493 Hz, 1009 Hz, 1478 Hz, 1994 Hz, 2510 Hz et 2979 Hz. Les résultats sont visibles sur les Figures II.6.3, II.6.4 et II.6.5.

Lorsqu’on regarde un haut-parleur en position extrême, on constate que les deux modèles divergent rapidement. Le modèle éléments finis devient de plus en plus directif en augmentant en intensité (jusqu’à +8 dB par rapport aux basses fréquences) alors que le modèle sphéroïdal voit sa directivité et son intensité peu varier avec la fréquence. On constate la même chose avec l’enceinte B (résultats non représentés ici).

Lorsque l’on regarde un haut-parleur en position latérale, on constate que le lobe principal n’est pas systématiquement en face du haut-parleur, comme l’on pourrait s’y attendre intuitivement (cet effet est aussi constaté en champ lointain, voir les *Balloon plot* en 3D). Le modèle sphéroïdal est très proche du modèle BEM jusqu’aux alentours de 1200 Hz pour l’enceinte A et 1000 Hz pour l’enceinte B. Autour des 2000 Hz commence à apparaître une différence de 3 dB sur le lobe principal, bien que le modèle sphéroïdal soit toujours capable de décrire la forme générale de la directivité. En regardant plus finement, on constate que le lobe principal de l’enceinte rectangulaire peut être multiple, et voit son centre se décaler dans l’espace en fonction de la fréquence.

Plus de détails et d’interprétations sont donnés dans les parties suivantes.

6.4 Motif de rayonnement tridimensionnel

Pour examiner la pertinence du modèle sphéroïdal en élévation, on choisit de montrer des *Balloon plot* plutôt que des figures de directivités dans le plan vertical (i.e le plan perpendiculaire à l’axe de la barre de son, et la coupant en son centre). En effet, on a constaté que le lobe principal se déplace et peut être multiple, ce qui rendrait une directivité tracé dans un tel plan peu pertinente, car elle ne contiendrait pas ni le maximum d’intensité, ni la source. Cela ne remet pas en cause la directivité horizontale, puisque l’on constate que le maximum d’intensité et la source sont dans ce plan.

On trace les *Balloon plot* obtenus uniquement pour l’enceinte A et le haut-parleur 2, avec le modèle éléments finis, ainsi qu’avec le modèle sphéroïdal M4. Les récepteurs

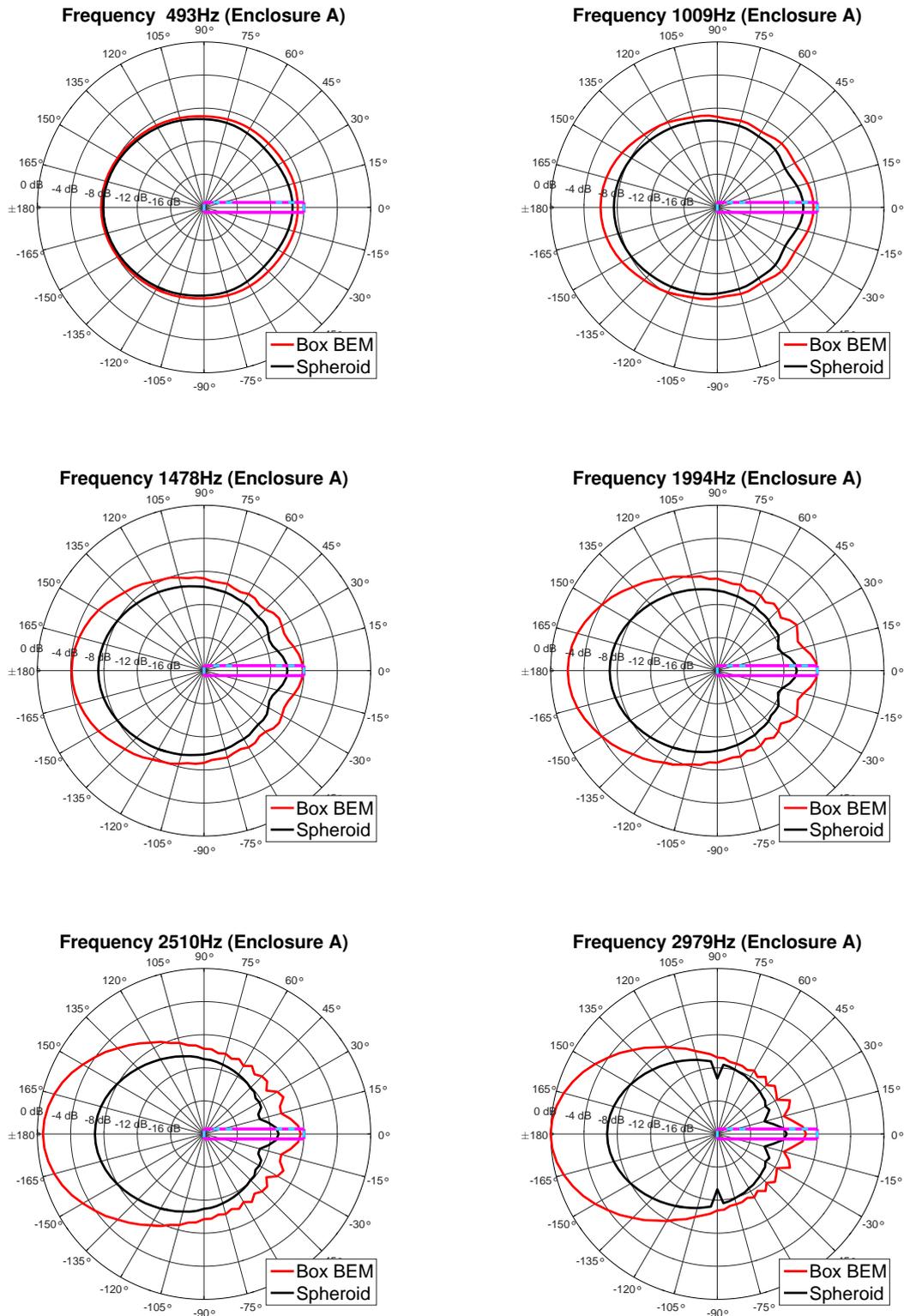


Figure II.6.3 – Comparaison des directivités horizontales issues du modèle sphéroïdal (M4) et du modèle éléments finis dans le cas de l'enceinte du HP1 (extrémal) de l'enceinte A pour 6 fréquences différentes. Le tracé est effectué pour des receveurs situés à 1.1 m en cercle autour de l'enceinte (dont la position dans l'espace est représentée en magenta) en utilisant la méthode de visualisation décrite dans l'annexe Annexe B.

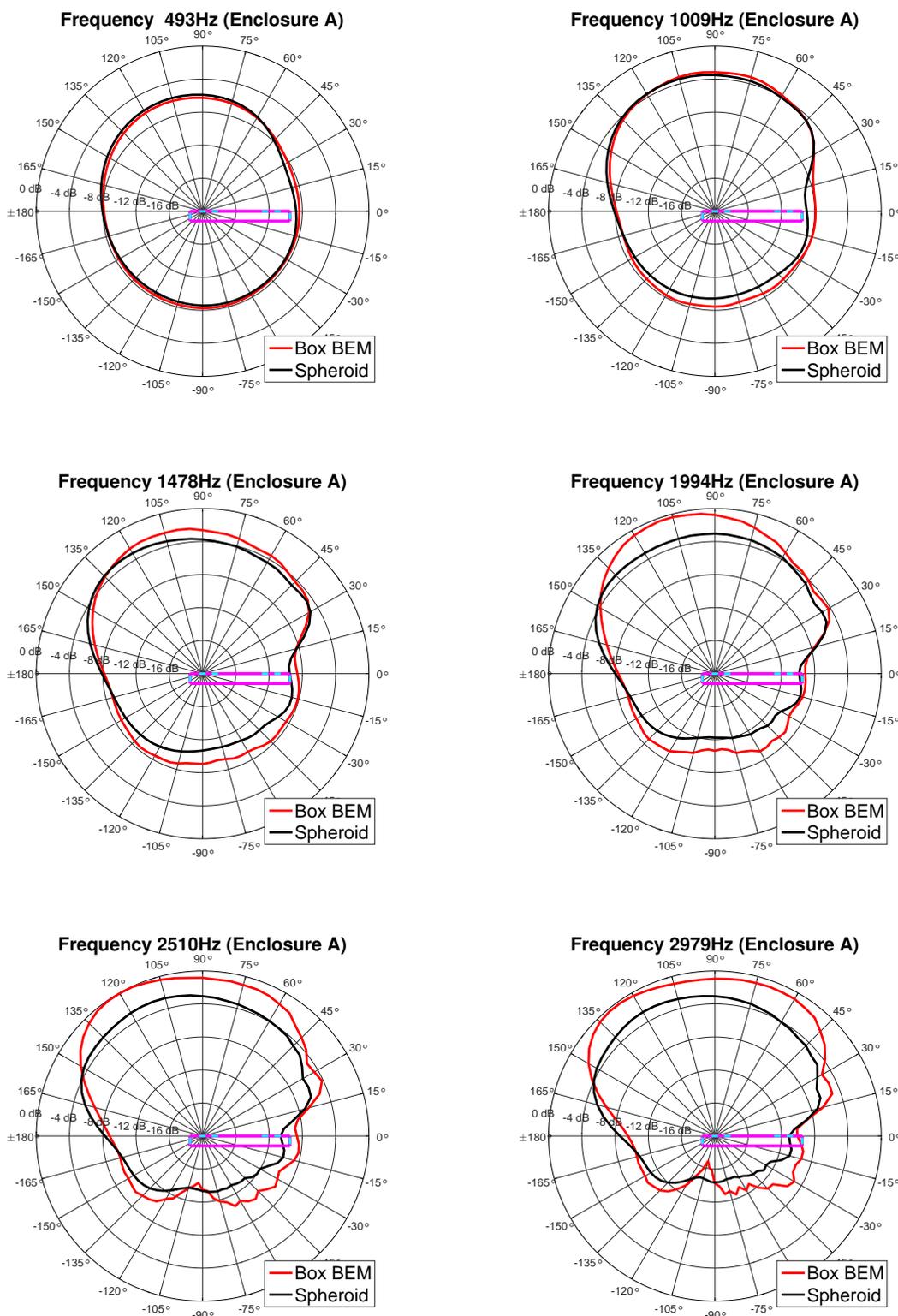


Figure II.6.4 – Comparaison des directivités horizontales issues du modèle sphéroïdal (M4) et du modèle éléments finis dans le cas de l'enceinte du HP2 (latéral) de l'enceinte A pour 6 fréquences différentes. Le tracé est effectué pour des receveurs situés à 1.1 m en cercle autour de l'enceinte (dont la position dans l'espace est représentée en magenta) en utilisant la méthode de visualisation décrite dans l'annexe Annexe B.

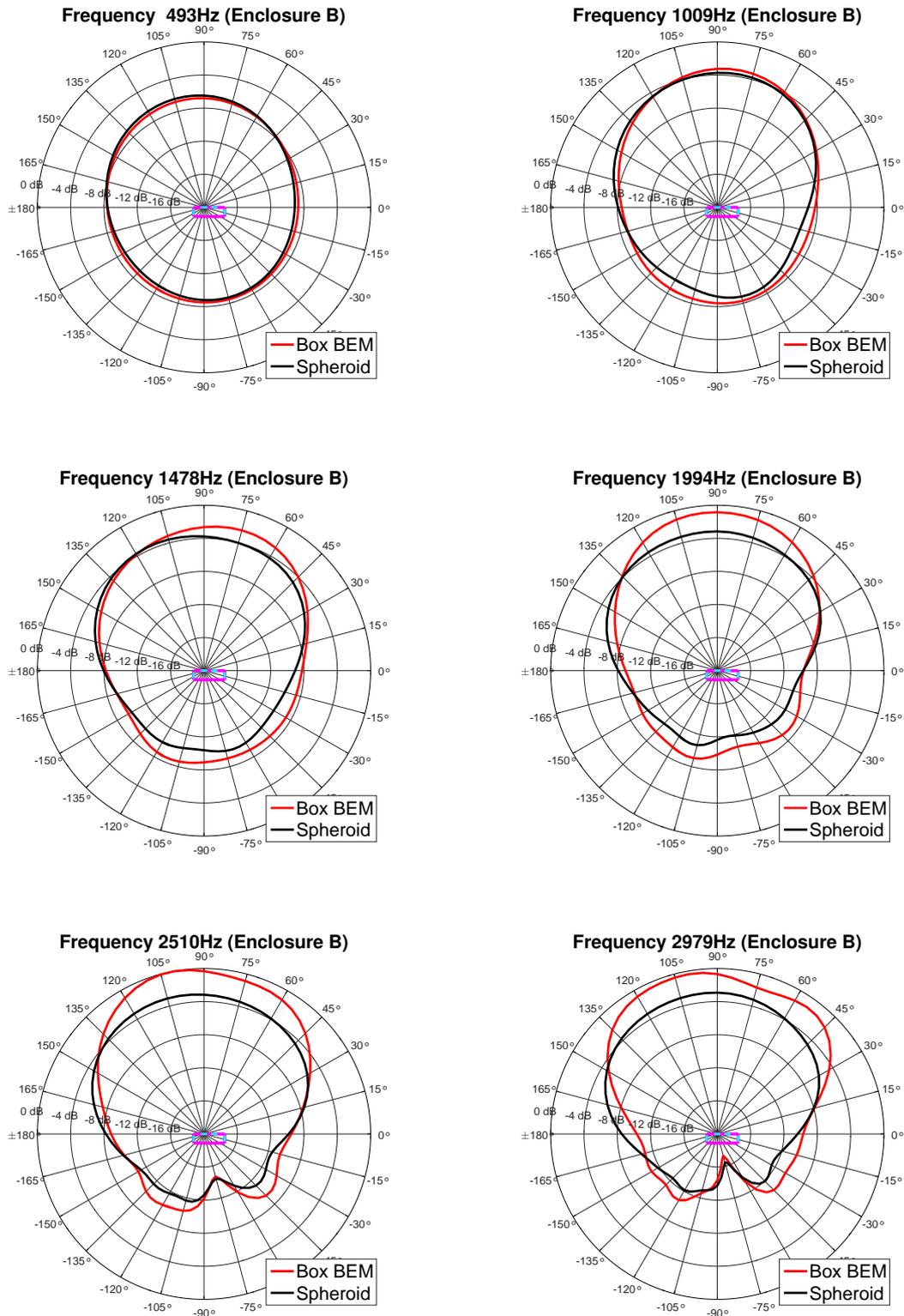


Figure II.6.5 – Comparaison des directivités horizontales issues du modèle sphéroïdal (M4) et du modèle éléments finis dans le cas de l'enceinte du HP2 (latéral) de l'enceinte B pour 6 fréquences différentes. Le tracé est effectué pour des receveurs situés à 1.1 m en cercle autour de l'enceinte (dont la position dans l'espace est représentée en magenta) en utilisant la méthode de visualisation décrite dans l'annexe Annexe B.

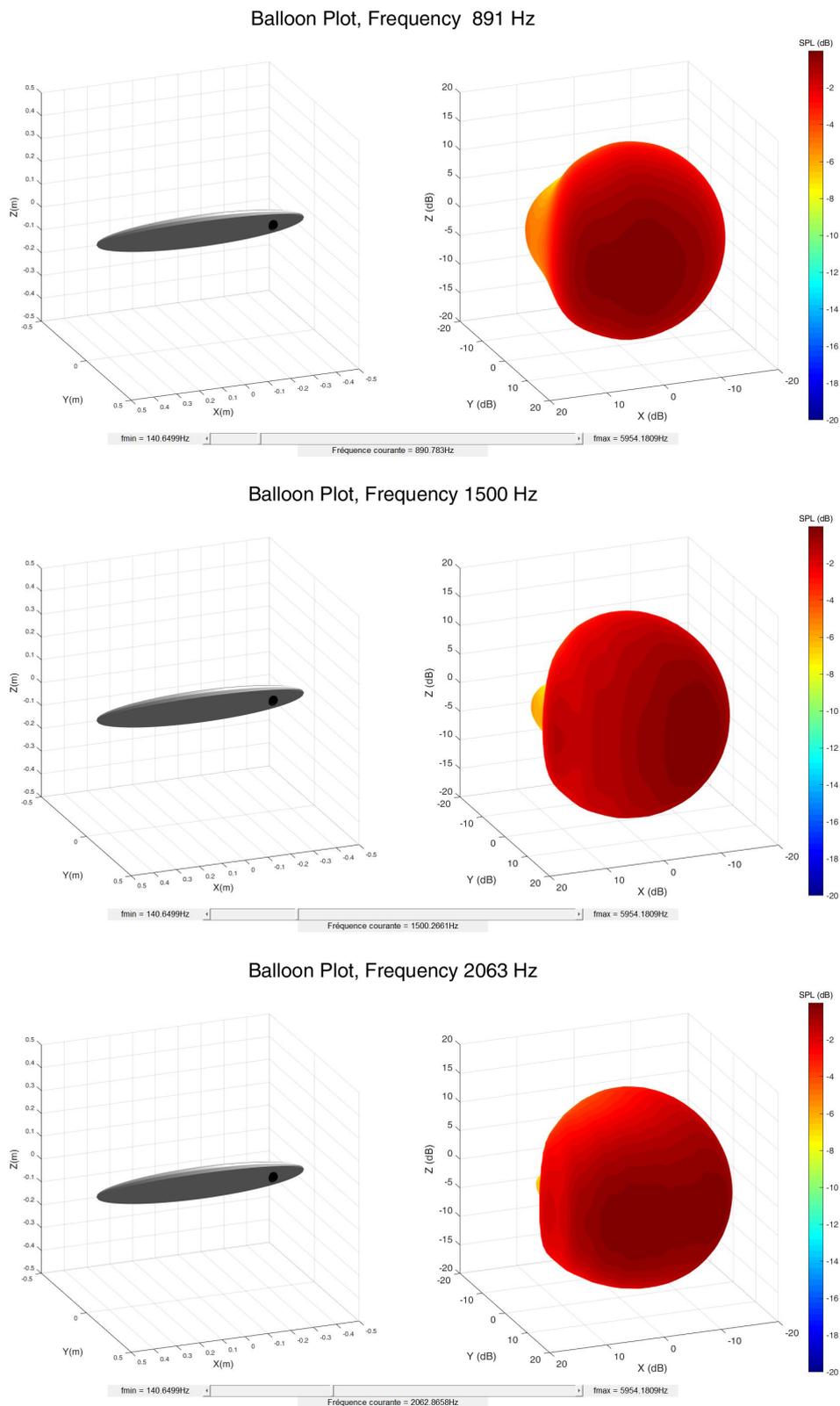


Figure II.6.6 – Visualisation de l’effet de baffle par l’enceinte sphéroïdale. Visualisation de l’intensité pression (normalisée à chaque fréquence) en champ lointain dans une direction de l’espace : La position du lobe principal se déplace dans l’espace en fonction de la fréquence. La forme du lobe change en fonction de la fréquence et peut être étalée verticalement, horizontalement ou être plus complexe.

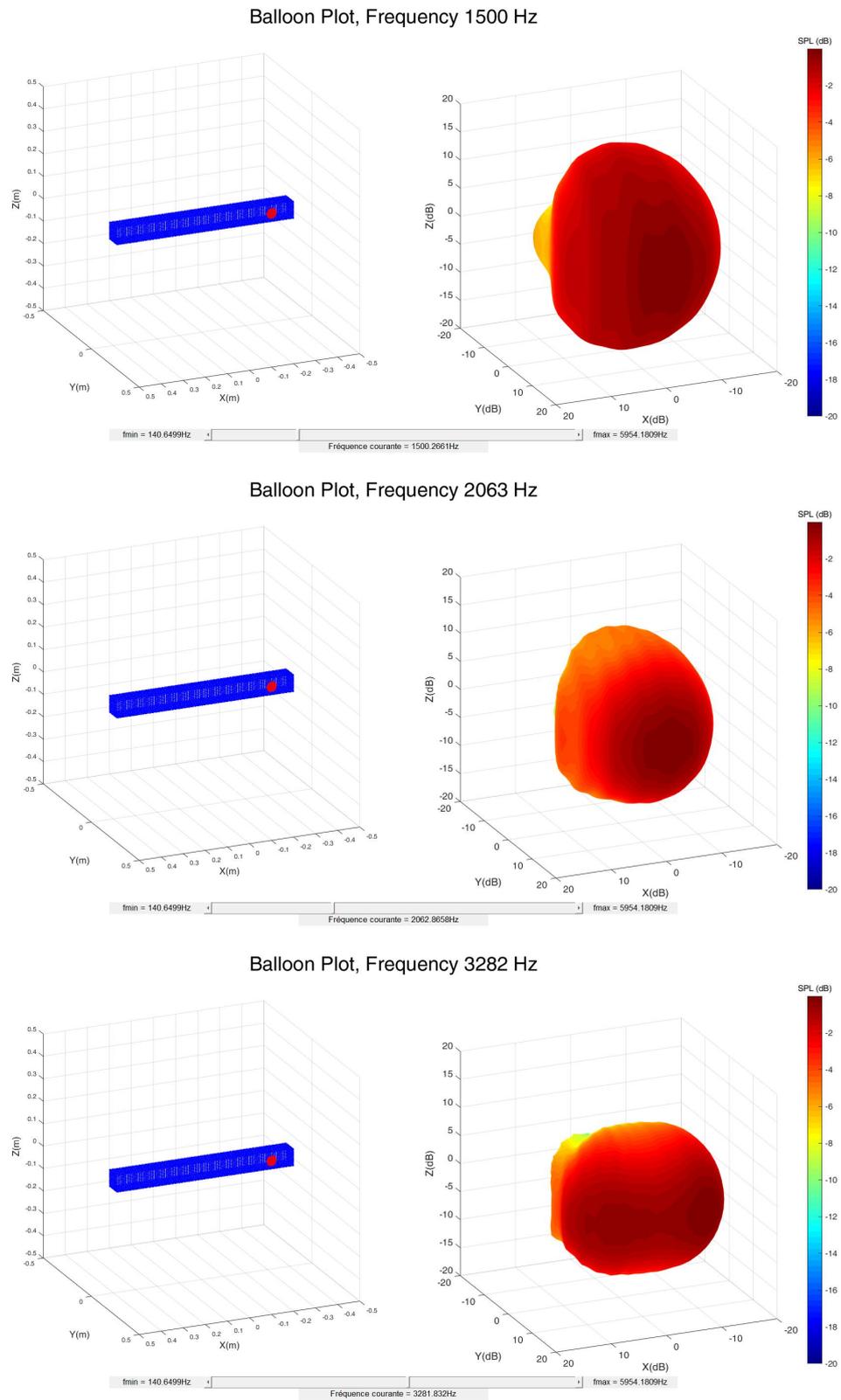


Figure II.6.7 – Visualisation de l'effet de baffle par l'enceinte rectangulaire. Visualisation de l'intensité pression (normalisée à chaque fréquence) en champ lointain dans une direction de l'espace : La position du lobe principal se déplace dans l'espace en fonction de la fréquence. Il peut être multiple (voir 3282 Hz) et a un motif qui ne correspond plus au modèle sphéroïdal au dessus de 1500 Hz.

sont situés à 11 m et répartis sur une sphère. La sphère est discrétisée selon le modèle des coordonnées sphériques, en admettant un point tous les 5° . Les résultats sont visibles sur les Figures II.6.6 et II.6.7. Pour plus de clarté, la couleur représente aussi l'amplitude dans une direction donnée, de même que la distance par rapport au centre. A chaque *Balloon plot* est associée la position de l'enceinte dans l'espace.

Pour le modèle sphéroïdal, on constate que la position du lobe principal du rayonnement se déplace dans l'espace en fonction de la fréquence. Le motif de rayonnement, et en particulier la forme du lobe principal change en fonction de la fréquence et peut être étalée verticalement, horizontalement ou être plus complexe. Ce comportement diffère de celui du modèle BEM, dont le lobe principal peut être multiple (voir 3282 Hz). Le modèle BEM voit son motif de rayonnement ne plus correspondre au modèle sphéroïdal au dessus de 1500 Hz. Additionnellement, ses variations de forme sont plus importantes.

6.5 Puissance rayonnée et réponse en fréquence dans l'axe

Pour avoir un point de vue plus globale sur l'évolution fréquentielle du rayonnement, on s'intéresse aussi à la réponse en fréquence dans l'axe du haut-parleur et la puissance rayonnée par les deux modèles. Ces deux indices sont couramment utilisés dans la littérature pour caractériser un haut-parleur monté sur une enceinte, et ont été décrits dans la Sect. 4.3 du chapitre 1. On a utilisé la méthode de visualisation de l'Annexe B, ce qui nous permet de nous affranchir de l'influence du monopôle en 6 dB/décade en nous ramenant à un comportement de type fonction de Green. On considère ici les enceintes A et B et les haut-parleurs 1 et 2. Les récepteurs sont situés à 11 m et répartis sur une sphère. La sphère est discrétisée selon le modèle des coordonnées sphériques, en admettant un point tous les 5° pour l'angle d'élévation et azimutal, soit un total de 2664 points (non régulièrement répartis). Les résultats sont visibles sur la Figure II.6.8.

Comme montré dans les sections précédentes, la direction du lobe principal d'émission varie selon la fréquence, même en champ lointain. Dès lors, la pression dans l'axe ne représente pas la variation en fonction de la fréquence du maximum d'intensité du rayonnement émis. Elle reste pour autant un bon indicateur, puisque l'on connaît les limites que doit prendre cet indice en haute-fréquence. Ainsi, on sait qu'en basse-fréquence, une enceinte rayonne dans tout l'espace, tandis qu'elle rayonne uniquement dans la moitié de l'espace en haute-fréquence. Ce comportement, bien connu sous le nom de *Baffle step response*, se traduit par un gain de +6 dB dans l'axe du haut-parleur en haute-fréquence par rapport aux très basses fréquences, avec plus ou moins de variations pour la zone de transition.

Concernant la puissance rayonnée, elle correspond à celle d'un monopôle unitaire en basse-fréquence, et tend vers 0 en très haute-fréquence si la source est un piston. Cet effet provient du phénomène de phase stationnaire qui montre que l'efficacité du rayonnement d'un piston est faible en haute-fréquence. Si la source était un monopôle unitaire (fonction de Green), alors la puissance rayonnée serait identique aux hautes et basses fréquences, et la zone de transition représente les effets de baffle de l'enceinte. Elle peut diminuer ou augmenter selon la forme de l'enceinte et est un bon indicateur sur l'efficacité de rayonnement d'une enceinte.

On constate qu'une forme d'enceinte sphéroïdale est globalement moins efficace pour rayonner dans l'espace qu'une forme rectangulaire, tant sur la valeur de la puissance que sur

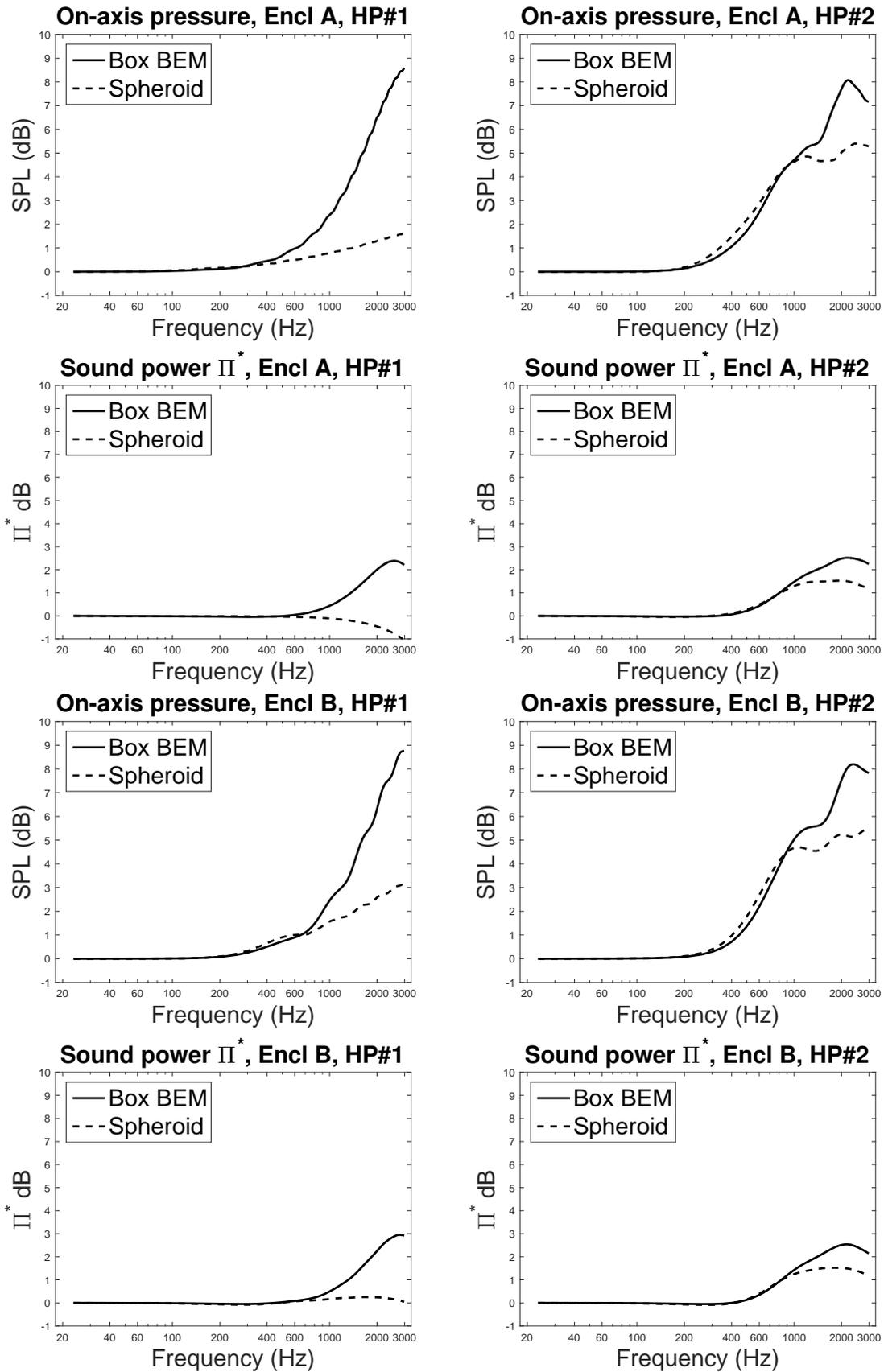


Figure II.6.8 – *On-axis pressure* (réponse en fréquence dans l'axe) et *Sound power* (puissance rayonnée) pour les haut-parleurs 1 et 2 de l'enceinte A et B.

la valeur de la pression. La différence entre un haut-parleur en position extrême (HP1) et un haut-parleur en position latérale (HP2) est nettement visible. Dans le cas d'une enceinte rectangulaire, on constate que la puissance rayonnée augmente avec la fréquence, quelle que soit la position du haut-parleur. En revanche, pour la forme sphéroïdale, la puissance rayonnée a tendance à diminuer pour une source en position extrême alors qu'elle augmente en position latérale.

Lorsque l'on regarde la réponse en fréquence dans l'axe des haut-parleurs latéraux, on voit que le modèle sphéroïdal fonctionne bien jusqu'à une fréquence de 1200 Hz pour l'enceinte A et 1000 Hz pour l'enceinte B. On avait déjà fait cette constatation dans la partie précédente. En revanche, la tendance s'inverse pour la position extrême, où l'on constate que le modèle sphéroïdal fonctionne bien jusqu'à une fréquence de 400 Hz pour l'enceinte A et 800 Hz pour l'enceinte B. Enfin, on constate que la réponse en fréquence dans l'axe d'une enceinte rectangulaire est toujours supérieure à 6 dB, tandis que l'enceinte sphéroïdale reste en dessous de cette valeur limite.

6.6 Temps de calcul

On souhaite également comparer le temps de calcul des deux modèles. Ce temps de calcul dépend grandement de l'implémentation, des méthodes et de la machine utilisées. Néanmoins, il reste un bon indicateur de ce que l'on peut attendre en terme de performance pour ce genre de modèle. On a par ailleurs conscience que l'implémentation de notre moteur d'éléments finis n'est pas la plus efficace disponible, mais elle possède l'avantage d'être connue et maîtrisée de bout en bout.

La difficulté de calcul du modèle sphéroïdal vient du calcul des fonctions d'ondes sphéroïdales, notées R_{ml} et S_{ml} . Lorsque l'on regarde la solution générale du modèle sphéroïdal donnée par l'Eq. (II.2.31), on remarque que ces fonctions ne dépendent que des variables η et φ . La variable φ intervient uniquement dans les fonctions sinus et cosinus, dont le temps de calcul est aujourd'hui quasiment instantané, comparé au temps de calcul de R_{ml} et S_{ml} . La variable φ correspond à une rotation autour du grand-axe du sphéroïde. Dès lors, le temps de calcul est quasi-identique pour des récepteurs distribués en cercle autour du sphéroïde dans un plan contenant son grand-axe, que pour des récepteurs distribués sur une sphère. Il faut pour cela discrétiser la sphère en exploitant cette symétrie, c'est-à-dire en prendre pour référence le grand-axe du sphéroïde comme axe de rotation des coordonnées sphériques associées. Le temps de calcul présenté ici prend en compte cette technique.

En outre, on constate qu'un changement de haut-parleur pour un même sphéroïde nécessite de recalculer uniquement les quantités \tilde{I}_{ml}^c et \tilde{I}_{ml}^s , c'est-à-dire un nombre réduit de fonctions sphéroïdales. Les temps de calculs présentés ici sont la moyenne d'un calcul fait pour 3 haut-parleurs (enceinte A), qui exploitent cette propriété. De fait, on divise par un peu moins de 3 le temps de calcul du modèle sphéroïdal par rapport au cas d'un haut-parleur unique.

Le calcul est fait pour un ensemble de $72 \times 37 = 2664$ récepteurs. La machine utilisée est un laptop Zbook de HP avec un CORE i7 vPro, et 8Go de mémoire vive. Le calcul est implémenté sous Matlab, mais le calcul des fonctions sphéroïdales est fait par le script Fortran de Van Buren [147] qui est appelé depuis Matlab. Le calcul utilise le critère de

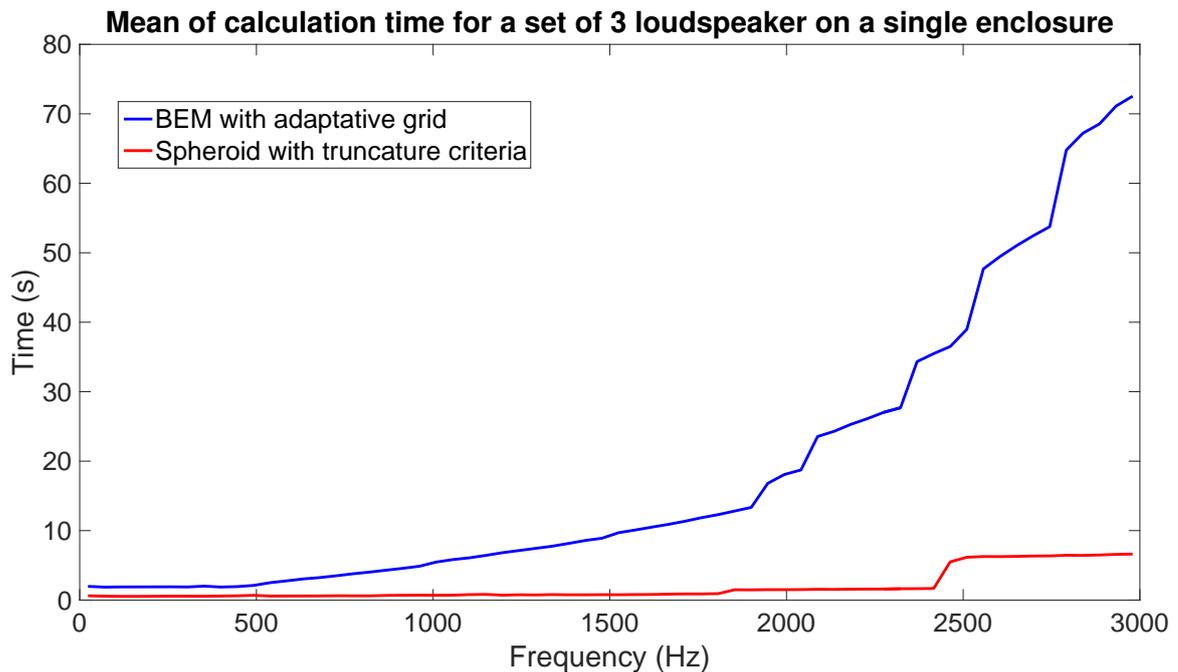


Figure II.6.9 – Comparaison du temps de calcul moyen en fonction de la fréquence pour un ensemble de $72 \times 37 = 2664$ récepteurs. On compare le modèle sphéroïdal (M4) et le modèle BEM dans le cadre de l’enceinte A. Le calcul est fait pour 3 haut-parleurs, puis est ramené à la moyenne du temps de calcul pour un seul haut-parleur. Cela permet d’exploiter au mieux le modèle sphéroïdal car les fonctions sphéroïdales sont calculées une seule fois pour les 3 haut-parleurs. Les deux modèles s’adaptent en fonction de la fréquence. Les sursauts du temps de calcul du modèle sphéroïdal proviennent du programme de Van Buren, qui change de méthode en fonction de la valeur des paramètres d’entrée.

troncature développé dans la partie précédente. Le calcul éléments finis est celui décrit dans le chapitre 1, et implémenté dans Matlab par Marc Bonnet¹. Le maillage est adaptatif selon la fréquence, assurant un minimum de 10 éléments par longueur d’onde. Les résultats sont présentés dans la Figure II.6.9.

On constate que le temps de calcul du modèle sphéroïdal est toujours plus intéressant que celui du modèle éléments finis. On remarque des variations brusques dans le temps de calcul du modèle sphéroïdal. Ces sursauts proviennent du programme de Van Buren, qui change de méthode en fonction de la valeur des paramètres d’entrée.

7 Discussion

Dans cette partie, on commente les résultats obtenus dans la section précédente en ajoutant notamment des interprétations ainsi que des critiques. C’est aussi l’occasion de conclure et de présenter les perspectives.

1. ENSTA Paris Tech, Palaiseau, FRANCE. <http://perso.ensta-paristech.fr/~mbonnet/>

7.1 Utilisation du critère de troncature

Dans ce chapitre, on a proposé un critère de troncature pour le développement de la pression sur les harmoniques sphéroïdales. Ce critère est basé sur une interprétation du comportement des ondes rampantes sur la surface rigide sphéroïdale émettrice, et est vérifiée de manière empirique, par l'étude du facteur de rayonnement, et expérimentale, en examinant la convergence de la solution dans un cas pratique. Cependant, ce critère est basé sur une interprétation en champ lointain, et n'est pas applicable en champ proche. Dans les faits, ce problème est facilement contournable. En effet, la limite champ lointain et champ proche dépend de la fréquence. Ainsi, plus la fréquence est haute, plus le champ lointain est "proche" et donc le critère applicable. Or, le critère est justement intéressant pour les hautes fréquences, puisque le calcul des premiers ordres, dominants en basse-fréquence où peu d'ordres sont nécessaires, est peu coûteux. Dans la pratique, il suffit de déterminer un ordre minimum de développement que l'on utilisera en basse-fréquence et jusqu'à atteindre le champ lointain.

Cette astuce ne fonctionne pas si on cherche à calculer des champs très proches du sphéroïde pour des distributions de vitesse initiales dont la projection sur les harmoniques sphéroïdales nécessite beaucoup d'ordres. C'est, par exemple, le cas pour un piston sur un sphéroïde, dont la discontinuité aux bords demande un nombre d'ordres théoriquement infini pour obtenir une description exacte. Dans ce cas, on peut avoir une idée du nombre d'ordres nécessaire pour une précision donnée en examinant la répartition de l'énergie de cette projection, c'est-à-dire en examinant à quel ordre on doit monter pour obtenir une représentation satisfaisante de notre distribution de vitesse initiale. Ce nombre peut faire office d'ordre minimum à atteindre pour le rayonnement en champ très proche. On est donc dans tous les cas capable de déterminer *a priori* un nombre d'ordres nécessaire.

7.2 Sphéroïde optimal dans le cadre de la modélisation

Nos résultats suggèrent que les 4 optimisations de forme que l'on a proposées ont des résultats équivalents en terme de prédiction du rayonnement d'une barre de son. On peut donc envisager de choisir le sphéroïde sur d'autres critères.

Comme expliqué dans la Sect. 5.1 et la Sect. 6.6, il peut être avantageux d'un point de vue temps de calcul d'utiliser un seul et même sphéroïde pour modéliser plusieurs haut-parleurs sur une même enceinte. Les deux optimisations que l'on a proposées et qui possèdent cette caractéristique sont les mélanges M1 et M4. Ceux-ci présentent l'avantage d'être optimisés uniquement par rapport à la forme de l'enceinte.

En outre, on cherche aussi à minimiser la distance entre haut-parleurs modélisés et haut-parleurs réels pour modéliser correctement les effets de propagation, dont on parle dans l'Annexe B. L'optimisation M4 est celle qui se rapproche le plus de cette propriété, et c'est donc celle-ci qui sera privilégiée. Tous les résultats ont donc été présentés avec cette optimisation.



Figure II.7.1 – Source omni-directionnelle de Bruel et Kjaer (type 4295). La forme de la source ressemble au sphéroïde obtenu pour la modélisation de l’enceinte B.

7.3 Modélisation d’un haut-parleur en position extrême

La modélisation d’un haut-parleur en position extrême d’une barre de son par un modèle sphéroïdal est peu efficace. On a constaté que les directivités sont mal représentées, tout comme la puissance rayonnée et la pression dans l’axe. L’effet est un peu atténué pour les enceintes courtes : la modélisation de l’enceinte B est meilleure que celle de l’enceinte A pour les haut-parleurs en position extrême. Les fréquences de coupure sont respectivement 800 Hz et 400 Hz, pour des longueurs d’enceinte de 25 cm et 80 cm

Il est intéressant de constater que la puissance rayonnée semble rester quasiment constante en fonction de la fréquence dans le cas de l’enceinte B. En comparant la forme obtenue pour le modèle sphéroïdal pour cette enceinte et la forme d’une source omni-directionnelle de chez Bruel et Kjaer sur les Figures II.5.2 et II.7.1, on note bien la ressemblance de forme. Ce résultat était donc prévisible.

Ainsi, le simple fait *d’arrondir* une barre de son, et en particulier pour le baffle situé en extrémité de la barre de son, peut faire passer d’un gain de +9 dB à un gain de +3 dB dans l’axe du haut-parleur, visible sur la Figure II.6.8 pour les deux enceintes A et B à une fréquence de 3000 Hz. Cet effet souligne notamment l’importance qu’à la forme de l’enceinte sur le rayonnement dans l’espace, avec des rayonnements qui peuvent être très différents pour des variations de forme qui ne semblaient pas si importantes. Cela pose la question de l’influence de l’extrémité d’une barre de son (section, taille, forme) sur le son produit par un haut-parleur en position extrême. L’influence est non négligeable et peut-être plus qu’une question de *design* en considérant les haut-parleurs situés aux extrémités. Notons qu’il y a peut être aussi une influence de la forme du haut-parleur à cette position. On a une calotte en bout de sphéroïde (qui épouse parfaitement la forme) au lieu d’un piston plat sur une face, mais l’effet ne disparaît pas complètement lorsque l’on considère deux monopôles à la place des haut-parleurs sur le modèle rectangulaire et

sur le modèle sphéroïdal.

7.4 Modélisation d'un haut-parleur en position latérale

La modélisation d'un haut-parleur en position latérale d'une barre de son par un modèle sphéroïdal fonctionne bien aux basses et moyennes fréquences, et moins bien pour des fréquences plus élevées. La différence entre les deux modèles vient principalement d'un manque d'environ 3 dB sur le lobe principal et sur le lobe arrière du rayonnement. On constate sur les figures des directivités horizontales que le rayonnement semble correctement décrit sur les plages latérales. Cet effet est principalement attribué à l'absence d'arêtes dans le modèle sphéroïdal, qui produisent un effet d'interférence positive, comme expliqué dans le chapitre 3. La suite des interprétations développées ici utilise une partie de l'interprétation développée dans le chapitre 3.

Ce sont les arêtes qui produisent des effets d'interférences qui eux-même déplacent la direction du lobe principal et causent parfois l'apparition de plusieurs lobes (chapitre 3). Ainsi, sur les Figures II.6.4 et II.6.5, on constate clairement le déplacement du lobe principal sur le modèle BEM. Par exemple, pour l'enceinte B, il est situé à droite à la fréquence 1478 Hz, au milieu à la fréquence 1944 Hz et à gauche à la fréquence 2510 Hz. Le même phénomène d'interférence apparaît sur l'enceinte A, sous la forme d'un lobe secondaire, clairement visible à la fréquence 2979 Hz. Ce lobe secondaire est aussi présent sur l'enceinte A et peut être visible sur le rayonnement 3D à la Figure II.6.7. En revanche, le lobe principal du modèle sphéroïdal associé reste quasiment constant, ce qui montre que c'est principalement l'effet de baffle (émission dans la moitié de l'espace) qui est à l'œuvre.

Cette interprétation est confirmée par la réponse en fréquence dans l'axe du haut-parleur de l'enceinte sphéroïdale sur la Figure II.6.8. En effet, celle-ci reste inférieure à 6 dB pour le modèle sphéroïdal alors qu'elle monte jusqu'à 9 dB pour le modèle rectangulaire. Or, comme expliqué dans la Sect. 6.5, l'effet de baffle ou *Baffle Step Response* implique un saut de 6 dB uniquement.

En vérité, il existe quand même des effets d'interférence dans le modèle sphéroïdal, comme le font apparaître les directivités 3D normalisées de la Figure II.6.6. En effet, le lobe se déplace et se déforme dans l'espace en fonction de la fréquence. Un autre indice confirmant ce phénomène se trouve dans la réponse en fréquence dans l'axe des haut-parleurs latéraux, sur la Figure II.6.8. On peut apercevoir des oscillations sur celles-ci, même dans le modèle sphéroïdal, qui sont caractéristiques d'un phénomène d'interférence. Cependant, cet effet n'est pas assez fort pour être comparable à celui du modèle rectangulaire. La modélisation sphéroïdale d'une enceinte est donc correcte quand cet effet d'interférence n'est pas prédominant, comme dans le cas du rayonnement d'une enceinte en basse-fréquence.

Cet effet est intrinsèquement lié à la géométrie et la forme de la section de l'enceinte. En effet, la section est arrondie dans le modèle sphéroïdal, ce qui laisse les ondes rampantes s'échapper depuis tous les points de la surface. L'effet d'interférence existe, mais est moins marqué que lorsque les ondes rampantes s'échappent depuis les arêtes uniquement. Cela explique notamment les variations de forme du lobe principal de la Figure II.6.6, qui proviennent bien d'interférences.

L'effet est ainsi moins marqué sur les plages latérales, car les arêtes dans le sens de

la longueur ne contribuent pas au rayonnement dans ces directions (voir chapitre 3). Le modèle sphéroïdal est donc valable jusqu'à des fréquences plus hautes pour le rayonnement latéral, car les effets d'interférence sont relatifs à des arêtes de longueurs plus faibles. Une autre manière de voir cet effet est de s'intéresser à une onde rampante qui se propage sur la surface d'une barre de son rectangulaire ou sur la surface d'une barre de son sphéroïdale. Dans ce cas, la différence entre ses deux trajets, respectifs aux deux formes, lorsqu'elle se propage selon le sens de la largeur, est plus importante que celle lorsqu'elle se propage selon le sens de la longueur. Dès lors, les effets d'interférences se manifesteront à des fréquences plus élevées (longueur plus petite) lorsque les ondes en jeu sont celles dans le sens de la longueur (i.e en face et derrière l'enceinte dans le cas d'un haut-parleur latéral) que lorsque les ondes sont celles dans le sens de la largeur (i.e sur les plages latérales). Cette dernière interprétation est possible, uniquement parce que la source de ces ondes est n'est pas en position extrême.

8 Conclusion et Perspectives

Dans ce chapitre, on a commencé par ré-établir l'expression du rayonnement d'un piston quelconque sur une enceinte sphéroïdale (Sect. 2.2). On a ensuite développé une méthode pour faire le calcul pour un piston circulaire (Sect. 3). L'expression du rayonnement est un développement du rayonnement sur des harmoniques sphéroïdales. L'étude et l'interprétation de ces harmoniques nous ont permis de trouver un critère de troncature pour le développement de la pression sur ces harmoniques (Sect. 4). Nous pouvons donc déterminer *a priori* celles qui sont nécessaires au calcul d'un problème donné. Ce critère se base sur un raisonnement intuitif. Il a été confirmé de manière empirique en examinant les facteurs de rayonnement modal (Sect. 4.2), et enfin vérifié expérimentalement dans un cas pratique (Sect. 6.1). Avec ces nouveaux outils, on a pu proposer une modélisation d'une barre de son rectangulaire par un modèle sphéroïdal (Sect. 5). On a pour cela proposé plusieurs méthodes pour choisir le sphéroïde associé à la barre de son. Il a été montré que ces méthodes sont sensiblement équivalentes du point de vue de la précision de modélisation (Sect. 6.2). Cela nous a amené à retenir la méthode la plus efficace en terme de temps de calcul et modélisation de l'effet de propagation. On a ensuite fait l'étude de la pertinence du modèle sphéroïdal par rapport à une barre de son rectangulaire en considérant deux cas particulier (Sect. 7.3 et Sect. 7.4). Cette étude s'appuie sur l'examen des directivités horizontales et sur les figures de rayonnement tridimensionnelles, ainsi que sur l'étude de la réponse en fréquence dans l'axe du haut-parleur et la puissance rayonnée. Il en ressort que la modélisation est peu pertinente si le haut-parleur est situé à l'extrémité de la barre de son. Elle est en revanche pertinente aux basses et moyennes fréquences pour un haut-parleur situé en position latérale. Le modèle s'écarte en haute-fréquence, avec une erreur d'environ 3 dB. Cette erreur est interprétée comme l'incapacité du modèle sphéroïdal à décrire correctement les effets d'interférence par les arêtes de l'enceinte rectangulaire. Le modèle est en revanche capable de modéliser avec une précision correcte les effets de baffle.

Cette dernière interprétation n'a été possible qu'avec le travail effectué dans le chapitre suivant, qui étudie plus en détail la diffraction par une enceinte rectangulaire. C'est donc cette étude qui a permis de conclure ce chapitre. Les résultats de celui-ci laissent penser que la forme d'une barre de son, en particulier la forme de sa section, est très importante pour son rayonnement du son. Il serait donc intéressant de se servir de ce modèle pour

modéliser une barre de son aux formes plus arrondies. Le gommage des arêtes pourrait permettre une meilleure coïncidence avec le modèle sphéroïdal. Il serait alors possible de se servir de ce modèle pour contrôler le rayonnement 3D de la barre, comme cela est fait avec un haut-parleur sphérique par Rafaely [107] ou Pasqual [99]. On pourrait alors profiter des propriétés connues des harmoniques sphéroïdales pour faire ce contrôle.

★ III ★

Méthode orientée haute-fréquence : Modèle *Edge* *Source Integral Equation* ou modèle de diffraction

Résumé

Dans ce chapitre, on présente le modèle ESIE (ou BTM pour Biot-Tolstoy-Medwin) et l'utilisation qu'on en a faite pour prédire le rayonnement acoustique d'une enceinte. On commence par redémontrer la formule de Svensson de diffraction par une arête finie avec la méthode de Pierce plutôt que celle de Biot. Cette démarche nous permet de faire une interprétation fine de cette formule. On montre également comment étendre la méthode d'une source monopolaire au cas d'une source étendue. On présente ensuite l'implémentation et les résultats obtenus avec cette méthode. Une comparaison succincte avec l'implémentation de Svensson, rendue disponible récemment, est effectuée. La méthode est efficace pour toutes les fréquences. En terme de temps de calcul, la méthode est très efficace lorsque le nombre de receveurs (ou micros) souhaité est faible. Par rapport aux éléments finis, la méthode ESIE est plus efficace à l'ordre 2 pour n'importe quel nombre de receveurs et à tous les ordres pour une centaine de receveurs. La méthode permet également de visualiser le champ acoustique rayonné par une enceinte sous la forme d'une somme de champs diffractés de différent ordre. Cela nous permet d'en faire une interprétation plus fine, notamment à propos du *Baffle step response*. On montre également que la direction du maximum d'intensité varie de manière contre-intuitive en fonction de la position du haut-parleur sur le baffle.

Table des matières

1	Introduction	122
2	Modèle BTM	126
2.1	Démonstration par la méthode de Pierce	126
2.2	Solution de Biot-Tolstoy	137
2.3	Formulation de Svensson	139
2.4	Interprétations physiques de la diffraction	145
3	Méthode ESIE	147
3.1	Diffraction par deux arêtes successives	147
3.2	Application à un polyèdre convexe	151
4	Application à une enceinte rectangulaire et implémentation	157
4.1	Cas particulier du polyèdre rectangulaire	157
4.2	Calcul numérique	161
4.3	Source étendue et méthode d'implémentation	163
5	Résultats	164
5.1	Paramètres du modèle ESIE	165
5.2	Comparaison ESIE et BEM	171
5.3	Analyse des directivités 3D à l'aide du modèle ESIE	172
6	Conclusion et perspectives	180

1 Introduction

Dans ce chapitre, on utilise un modèle de diffraction pour décrire le rayonnement d'une enceinte. Le rayonnement est vu comme une somme de contributions : la contribution du champ direct provenant de la source et indépendant de l'enceinte et les contributions de celle-ci. Ces dernières sont vues comme un ensemble de sources secondaires sur les arêtes. Cette décomposition qui fait apparaître des sources bien localisées, nous permet de faire une interprétation physique de certains effets observés dans les chapitres précédents.

La diffraction du son provenant d'un haut-parleur par son enceinte est un phénomène qui a été remarqué très tôt. Elle est souvent interprétée en terme d'interférence du champ direct avec les sources secondaires situées sur les arêtes. Plus précisément, lors de l'étude de la réponse en fréquence dans l'axe du haut-parleur, on observe la présence de fréquences de résonance spécifiques, que l'on peut relier aux dimensions géométriques du baffle. La première étude en ce sens est l'étude expérimentale d'Olson [96]. L'interprétation est similaire aux théories géométriques de la diffraction et leurs approches par rayons. Ces théories sont valables en haute-fréquence uniquement. Il faut attendre 1986 pour que Bews [13] applique la GTD (*Geometrical Theory of Diffraction*) de Keller [59] pour retrouver les résultats d'Olson. Mais son application est fortement critiquée par ses pairs, à cause des propriétés incorrectes de la phase du champ diffracté. Il y aura d'autres modèles de

diffraction, comme par exemple celui de Vanderkooy [149] basé sur un modèle de *Biot-Tusltoy-Medwin* (BTM) simplifié, qui essuieront différentes critiques. En 1997, Wright fait une revue des applications à une enceinte rectangulaire de différentes théories de la diffraction [159]. Ces théories sont toutes des approximations. Il souligne les contradictions d'interprétation des différents auteurs, et met ainsi en évidence la difficulté d'interpréter et de modéliser correctement le rayonnement d'une enceinte. On peut ajouter à ces approximations le modèle DED (pour *Dipole Edge Diffraction*) d'Urban [145], encore très utilisé aujourd'hui pour sa rapidité mais peu précis, en particulier lorsque l'on est hors de l'axe du haut-parleur. Ces modèles restent peu satisfaisants pour prédire le rayonnement dans tout l'espace et/ou en basse-fréquence. Pour y arriver, il est nécessaire de bien comprendre ce qu'on entend par diffraction.

La diffraction est un phénomène complexe, très étudié, mais pour lequel il n'existe pas de modèle universel. C'est un concept central dans l'étude des ondes électromagnétiques et acoustiques. La définition de la diffraction n'est pas formelle et se base sur une vision mathématique du champ total. Celui-ci est vu comme la somme du champ direct, du champ réfléchi (qui forment à eux deux la partie géométrique du champ total) et du champ diffracté. Par définition, le champ diffracté est la partie restante du champ total lorsqu'on supprime sa partie géométrique. Cette définition élude l'origine physique de la diffraction, et explique, en partie, la difficulté de trouver un modèle général. On peut souligner trois difficultés inhérentes à cette vision. La première est la discontinuité intrinsèque de la partie géométrique, qui n'est pas retrouvée dans le champ total. Il faut donc que le champ diffracté compense la partie géométrique et soit, lui aussi, discontinu. Cela entraîne des problèmes de singularités du modèle aux frontières. La seconde est la validité en basse-fréquence. La partie géométrique du champ total est d'autant plus dominante que la longueur d'onde est faible devant les dimensions de l'objet étudié. C'est l'inverse en basse-fréquence, ce qui rend plus complexe l'étude du champ diffracté dans ce domaine. Enfin, dans le champ diffracté lui-même, il faut distinguer le champ de premier ordre et le champ d'ordre multiple. Le premier représente la résultante de l'interaction du champ direct ou réfléchi avec l'objet qui diffracte. Cette résultante est vue comme une nouvelle source, qui interagit à nouveau avec l'objet, créant le champ d'ordre multiple. Ainsi, même si la source primaire est simple, la complexité du champ de premier ordre sera relative à la complexité de l'objet. L'étude de la diffraction de ce champ peut alors s'avérer très difficile selon l'objet étudié. Pour toute ces raisons, l'étude de la diffraction se fait généralement au cas par cas en fonction des hypothèses du problème.

La plupart des modèles de diffraction en acoustique sont donc des approximations, basées sur différentes approches. Une première classe de méthode regroupe celles s'appuyant sur l'approximation de Kirchhoff, c'est à dire une hypothèse de longueur d'onde petite devant les dimensions du problèmes. Cette hypothèse permet de simplifier l'équation de Kirchhoff-Helmholtz, de manière plus ou moins efficace selon le problème, pour faire apparaître le champ diffracté. On peut faire des simplifications additionnelles si on s'intéresse au champ proche (approximation de Fresnel) ou au champ lointain (approximation de Fraunhofer). Ces méthodes ont été largement utilisées en acoustique et sont caractérisées par un coût calculatoire faible, avec une intégrale double pouvant souvent se mettre sous la forme d'une intégrale simple [45]. Il existe des formulations compactes du champ diffracté en haute-fréquence si on fait l'hypothèse que l'objet est un polyèdre rigide [74]. Il est aussi possible d'étudier la diffraction d'ordre multiple [120]. Une seconde classe

de méthode très utilisée regroupe les méthodes dites géométriques, telles que la GTD, ou encore son extension l'UTD pour *Uniform Theory of Diffraction*. Ces méthodes sont très efficaces en terme de temps de calcul. Elles utilisent une approche par rayon, qui considère une source monopolaire comme une source de rayons, qui en émet un nombre fini. Si un rayon vient toucher une surface, il est alors réfléchi selon les lois empiriques de cette méthode, formant ainsi le champ réfléchi. De la même manière, si un rayon touche une arête, on considère que celle-ci ré-émet de l'énergie dans certaines directions. Celles-ci forment un cône, dont la formulation dépend de l'angle d'incidence. Une revue récente et complète à propos de ces méthodes est disponible dans [100]. Un problème inhérent à ce genre de méthodes est que, d'un point de vue statistique, un rayon touche rarement exactement une arête. On doit donc "s'arranger" dans le choix des rayons que l'on considère. Ce choix va fortement conditionner l'énergie du champ diffracté, et la discontinuité du champ est mal représentée. C'est une des raisons pour laquelle ces méthodes sont plus efficaces lorsque la diffraction est faible. Une autre méthode pour pallier ce problème existe, et est basée sur la relation d'incertitude d'Heisenberg [131, 130]. Cette méthode introduit une notion probabiliste qui, en fonction de la longueur d'onde, détermine quand et à quel point un rayon passant proche d'une arête interagit avec celle-ci. Très efficace en terme de temps de calcul, la méthode reste cependant une approximation (par exemple la thèse de Pohl [102]). Enfin, citons en dernier lieu la méthode DLSSM (pour *Directive Line Source Model*) développée par Menounou [86, 87]. L'hypothèse principale de cette méthode est que la source primaire et les récepteurs (i.e les microphones) sont éloignés de l'objet. Cette méthode est encore une fois rapide d'un point de vue des calculs, mais aussi assez générale. En effet, ses hypothèses sont relativement faibles et une grande variété d'ondes incidentes peut être utilisée. Elle est malheureusement inapplicable pour modéliser une enceinte car la source est située sur celle-ci, et donc en champ proche.

Notons qu'en électromagnétique, les études sont encore un peu plus compliquées puisqu'une telle onde est vectorielle, alors qu'une onde acoustique est scalaire. On est cependant capable de développer des modèles corrects pour les polyèdres, dont une revue récente des modèles possibles est disponible dans [150]. Notons en particulier qu'il existe des modèles de double diffraction en haute-fréquence [28, 29], qui ressemblent beaucoup à ceux de l'acoustique.

Pour notre étude d'enceinte, on s'intéresse à un objet rigide, convexe, composé uniquement de plans et d'arêtes, et pour lequel la source primaire peut être considérée comme un ensemble de sources ponctuelles situées sur une face de l'objet. Dans ce cas précis, on peut trouver une solution "quasi-exacte" pour le champ diffracté. On reviendra sur cette notion de "quasi-exacte". La solution se base sur le modèle BTM (*Biot-Tolstoy-Medwin*). Le modèle BTM est la solution exacte d'une onde acoustique sphérique (issue d'une source ponctuelle de volume) diffractée par une arête infinie, composée de faces rigides. Elle est introduite pour la première fois par Biot et Tolstoy [14] et est donnée en coordonnées cylindriques sous une forme intégrale. Pierce retrouvera la même expression par une méthode différente dans [101]. Plus tard, Kinney utilisera la démonstration de Pierce dans le cas d'une face absorbante (condition de Dirichlet) [61], et Chu dans le cas de conditions mixtes [32]. La solution théorique de Biot et Tolstoy est exploitée pour la première fois par Medwin [82]. Il transforme la source ponctuelle de volume en une impulsion de Dirac et donne une méthode pour exploiter numériquement l'intégrale de Biot. Il interprète alors le résultat du point de vue de Huygens, présentant l'arête comme une somme infinie de

sources secondaires [83]. Dans ce cadre, Clay [35] montre qu'un nombre de points minimum sur l'arête est nécessaire pour éviter un phénomène d'*aliasing* spatial. Cette vision de sources secondaires sur l'arête n'est valable que si les faces sont parfaitement rigides. Si l'objet est absorbant, l'intégrale comprend aussi la contribution d'ondes de surface et l'interprétation en sources secondaires ne tient plus [50].

Pour appliquer le modèle BTM à une enceinte, il faut établir une expression pour une arête finie, ainsi qu'une méthode pour calculer le champ diffracté d'ordre multiple. En 1999, Svensson [140] propose pour la première fois une formulation avec ces deux composantes, et établit ainsi la solution exacte du champ diffracté par une arête finie, valide à toutes les fréquences. Cette formulation temporelle souffre des classiques problèmes d'irrégularités lors de la transition entre une zone éclairée et une zone d'ombre [137]. Ce problème est cependant traité par Calamia, pour le premier ordre de diffraction, dont la thèse porte sur ces singularités et l'optimisation du temps de calcul [25, 139, 24]. La formulation dans le domaine fréquentiel suivra rapidement [138], avec des méthodes pour les singularités relatives à cette formulation [7]. Celle-ci permet de formaliser la solution exacte du champ diffracté par les arêtes d'un polyèdre convexe sous forme d'opérateur [136, 8]. On l'appelle alors ESIE pour *Edge Source Integral Equation*. Cette formulation est aussi à l'étude pour des polyèdres non convexes [79]. Cette formulation souffre toujours d'irrégularités aux zones de transition pour le champ diffracté d'ordre 2 ou plus, mais il est possible de mélanger l'ESIE avec la méthode des éléments finis de frontière (BEM) pour s'en affranchir [135]. En revanche, il a été montré [132] que cette méthode est incapable de rendre compte de l'effet dit de *Slope Diffraction*, c'est-à-dire la diffraction par un objet d'une onde dont le champ de pression est nul au contact de l'objet, mais pas son gradient (voir [144, 143]). Cette constatation est surprenante car l'établissement de la formule ne laisse pas apparaître d'approximations explicites qui négligeraient cet effet. Il est pourtant indéniable qu'une partie de la solution est manquante, d'où l'appellation quasi-exacte. Malgré cela, le modèle BTM et la méthode ESIE ont déjà été appliqués plusieurs fois avec succès en acoustique. Dans le cadre de l'acoustique sous-marine, il est possible de modéliser le fond marin comme un ensemble d'arêtes avec le modèle BTM [57]. Un autre exemple sous-marin est l'application du modèle ESIE pour trouver la solution dans le domaine temporel de la diffraction par objet qui se déplace [58]. D'autres applications récentes comprennent, par exemple, l'utilisation de la méthode ESIE pour accélérer le calcul de propagation du son dans des scènes 3D complexes [6]. D'autres encore s'en servent pour l'étude de la transmission et propagation d'une impulsion acoustique dans une cavité hermétique composée de murs élastiques. Notons que la méthode ESIE a déjà été utilisée une fois pour prédire la réponse en fréquence dans l'axe d'un haut-parleur [162].

La méthode ESIE possède deux avantages par rapport au modèle BEM : d'abord elle permet une interprétation plus fine des phénomènes physiques à l'œuvre dans la diffraction du son par une enceinte. De plus, elle est théoriquement plus rapide, bien que plus lente, que les autres méthodes approchées citées plus haut. Seule l'implémentation de Svensson est disponible en libre accès, dans une version Matlab dite "de recherche" difficile à aborder. Elle était indisponible au début de notre étude. Pour cette raison, nous avons décidé de ré-implémenter notre propre version de l'ESIE, dans une version plus simple, qui s'applique uniquement au cas particulier des enceintes rectangulaires. Dans ce chapitre, on commence par redémontrer la formulation BTM à l'aide de la méthode de Pierce plutôt

que de Svensson, ce qui nous permet de faire une interprétation physique de ce modèle. Des détails sur les implémentations possibles et des remarques sur la méthode issue de la démonstration précédente sont ensuite donnés. Enfin, on comparera rapidement nos résultats avec l'implémentation de Svensson, et on se servira de l'ESIE pour interpréter finement le rayonnement induit par une forme d'enceinte rectangulaire. On mettra en évidence un effet contre-intuitif sur la direction du rayonnement d'une enceinte.

2 Modèle BTM

Dans cette section, on étudie la diffraction par une arête, au moyen de trois formulations classiques de la littérature : Celles de Pierce, de Biot et de Svensson. On commencera par donner des éléments de démonstration de la formule de Pierce, puis on fera le lien entre les différentes formulations. On pourra ensuite faire une interprétation de la formule de diffraction.

2.1 Démonstration par la méthode de Pierce

Dans cette section, on établit la formule de diffraction par une arête infinie dans le domaine fréquentiel. On reprend la démonstration de Pierce, disponible en des termes très succincts dans [101]. Par rapport à celle-ci, on se concentrera sur les étapes permettant d'interpréter physiquement le champ diffracté, en donnant plus de détails. En revanche, on omettra les calculs fastidieux qui vérifient que les solutions trouvées sont bien celles attendues. En effet, la démonstration de Pierce à l'avantage d'être plus "intuitive" que celle de Biot ([14]) et permet une interprétation physique de la formule.

Hypothèses et conditions du problème :

- On se place dans le cadre de l'acoustique linéaire. On utilise les notations de la Figure III.2.1. On se place dans un repère cylindrique pour lequel l'arête est confondue avec l'axe Oz . Les coordonnées sont alors (r, θ, z) (voir Figure III.2.1).
- On cherche la solution de l'équation de Helmholtz dans le domaine fréquentiel lorsqu'on est en présence d'une arête composée de deux demi-plans infinis définis par $(Oz, \theta = 0)$ et $(Oz, \theta = \theta_w)$, éclairée par une source monopolaire située en un point S , à une pulsation ω . On cherche la solution pour tous points R différents du point S , des points situés à l'extérieur du domaine d'étude (c'est-à-dire les points tels que $\theta_w \leq \theta \leq 2\pi$ qui sont isolés de la source) ou des points situés sur l'arête (c'est-à-dire le domaine défini par $r = 0$, i.e Oz).
- On impose des conditions de Neumann sur les deux demi-plans composant l'arête, ce qui correspond à des faces parfaitement réfléchissantes. En considérant que \hat{p} est la valeur complexe de la pression dans le domaine de Fourier, \vec{n} la normale d'une face, on a :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \vec{n}}(\theta = 0) = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \vec{n}}(\theta_w = 0) = 0 \quad (\text{III.2.1})$$

- On ajoute également la condition de Sommerfeld, classiquement exprimée dans les

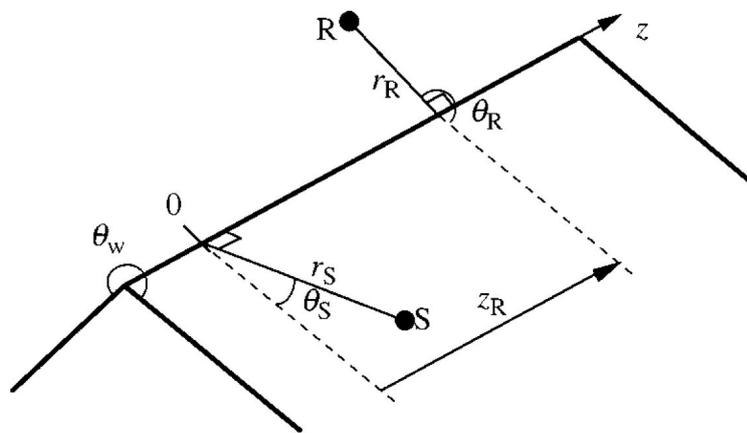


Figure III.2.1 – Notations utilisées pour la démonstration d’une arête infinie. La source est représentée par le point S et le micro / receveur par le point R. L’arête infinie est située sur l’axe Oz. Le repère est tel que $z_S = 0$. D’après [140]

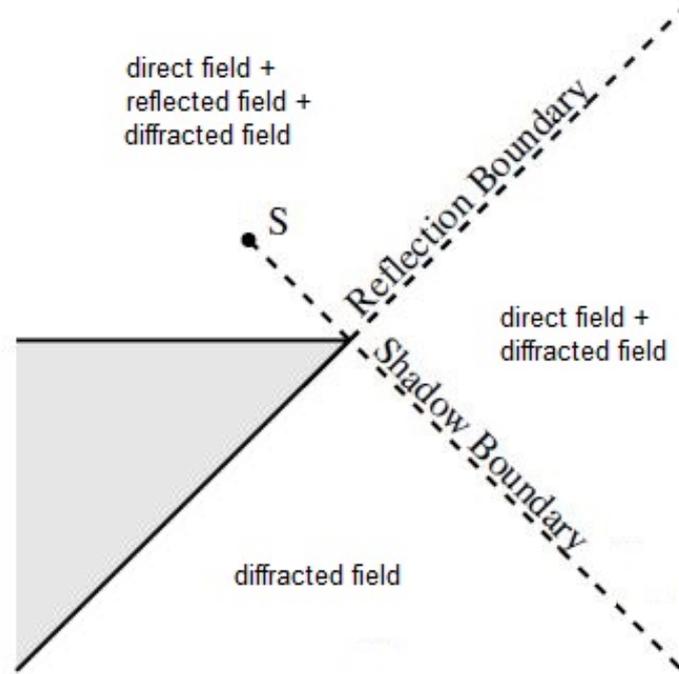


Figure III.2.2 – Les trois zones possibles pour une arête. Ces zones sont séparées par deux plans pour lesquels l’expression du champ diffracté par une arête infinie est singulière

coordonnées sphériques comme suit :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right) \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} - jk\hat{p} \right) \right] = 0 \quad (\text{III.2.2})$$

où k est le nombre d’onde et c est la vitesse du son.

2.1.1 Objectif et idée de la démonstration :

On décompose la pression au point R , telle que :

$$\hat{p}(R) = \hat{p}_{\text{direct}} + \hat{p}_{\text{GA}} + \hat{p}_{\text{diff}} \quad (\text{III.2.3})$$

Avec

- \hat{p}_{direct} le champ direct
- \hat{p}_{GA} le champ réfléchi, issu des concepts de l’acoustique géométrique (voir [59])
- \hat{p}_{diff} le champ diffracté.

Les deux premiers termes sont faciles à déterminer avec les concepts classiques de l’acoustique géométrique. Il seront souvent assimilés au même terme. Notons qu’ils peuvent être nuls selon la zone dans laquelle est situé le point R (voir la Figure III.2.2). Toute la

difficulté est de trouver l'expression du troisième terme. L'objectif de la prochaine section est de montrer que ce terme prend la forme suivante :

$$\hat{p}_{\text{diff}} = -\frac{\hat{S}}{4\theta_w} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\pi - is) \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \frac{\sin(\nu(\pi + (-1)^n \theta_R + (-1)^m \theta_S))}{\cosh(\nu s) - \cos(\nu(\pi + (-1)^n \theta_R + (-1)^m \theta_S))} ds$$

avec

$$\mathcal{G}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{r_R^2 + r_S^2 - 2r_S r_R \cos(\xi) + z_R^2}} e^{jk\sqrt{r_R^2 + r_S^2 - 2r_S r_R \cos(\xi) + z_R^2}}$$

Pour cela, on va d'abord considérer la solution générale de l'équation de Helmholtz, en l'absence d'arête, pour une source complexe. Cette source sera exprimée comme une somme infinie (une intégrale) de monopoles, pondérés par une fonction pouvant dépendre des différents paramètres du problème. On va ensuite restreindre cette solution de telle sorte à ce qu'elle soit solution de notre problème défini ci-dessus. On finira par identifier cette expression à l'Eq. (III.2.3), dont les deux premiers termes sont connus. La partie restante sera donc la partie relative au champ diffracté.

Remarque : la solution de Pierce utilise la convention en $e^{-i\omega t}$, que l'on a utilisée pour les deux chapitres précédent. Svensson utilise la convention $e^{i\omega t}$ dans la littérature et on fera donc de même lorsqu'on comparera cette formule à la sienne.

2.1.2 Expression de la solution générale en champ libre :

Solution pour une seule source

On peut exprimer la distance entre le point S et le point R, avec les notations adoptées, à l'aide du théorème d'Al-Kashi. On obtient :

$$\|\vec{SR}\| = \sqrt{r_R^2 + r_S^2 - 2r_S r_R \cos(\theta_R - \theta_S) + z_R^2} \quad (\text{III.2.4})$$

La solution élémentaire lorsque la source S est un monopole, en champ libre, s'écrit alors simplement à l'aide de la fonction de Green :

$$G = \frac{1}{\|\vec{SR}\|} e^{jk\|\vec{SR}\|} \quad (\text{III.2.5})$$

Notons que l'on peut interchanger θ_R et θ_S sans conséquence et que l'on satisfait ainsi le principe de réciprocité.

Prérequis : définition de fonctions holomorphes

L'expression G de l'Eq. (III.2.5) est la base de la démonstration qui suit. Parce qu'on va utiliser les outils de l'analyse complexe, on doit étudier certaines propriétés mathématiques de cette expression.

On définit une fonction \mathcal{R} , qui associe à la différence $\xi = \theta_R - \theta_S$ la mesure $\|\vec{SR}\|$, à l'identique de l'Eq. (III.2.4). Remarquons que l'on fait le choix d'utiliser comme variable la différence des angles associés à R et S , sans prendre en considération les paramètres de distance r_R , r_S et z_R , qui sont considérés comme fixes. Ce choix provient de la construction

de l'acoustique géométrique, qui place les images de la source à égale distance de l'arête (voir la Figure III.2.3). On pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto \sqrt{r_R^2 + r_S^2 - 2r_S r_R \cos(\xi) + z_R^2} \end{aligned}$$

Cette fonction est positive si ξ est réel. Elle est aussi périodique de période 2π . De plus, elle est analytique sur le plan complexe (i.e holomorphe) sauf aux points singuliers, qui sont les points pour lesquels $\mathcal{R}(\xi) = 0$. Il y a une discontinuité de la phase de $\mathcal{R}(\xi)$ pour ces points. Ils sont définis comme l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ (visibles sur la Figure III.2.4), tel que :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{R}} = \left\{ 2\pi l \pm j\alpha, \forall l \in \mathbb{Z}, \alpha = \cosh^{-1} \left(\frac{r_R^2 + r_S^2 + z_R^2}{2r_S r_R} \right) \right\} \quad (\text{III.2.6})$$

On peut maintenant définir la fonction \mathcal{G} , sur le modèle de l'Eq. (III.2.5), à l'aide de la fonction \mathcal{R} , telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathcal{S}_{\mathcal{R}} \\ \xi &\mapsto \frac{1}{\mathcal{R}(\xi)} e^{jk\mathcal{R}(\xi)} \end{aligned}$$

On remarque que la fonction \mathcal{G} est elle aussi analytique et périodique sur son domaine de définition, i.e le plan complexe privé de l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ (visible figure III.2.4).

Solution pour une source multiple en champ libre

La fonction $\mathcal{G}(\xi)$ est solution de l'équation de Helmholtz en l'absence d'arête. Remarquons que $\mathcal{G}(\theta_R - \xi)$ est encore solution, et équivaut à faire tourner le point R autour de l'arête, de sorte à ce qu'il se positionne sur une des faces de l'arête. Notons bien que l'arête est encore virtuelle à ce stade, et qu'en conséquence, faire tourner le point R revient à faire tourner le point S d'après le principe de réciprocité.

On utilise alors le principe de superposition, qui affirme alors que n'importe quelle combinaison linéaire sur le corps des complexes de $\mathcal{G}(\theta_R - \xi)$ est aussi solution de l'équation de Helmholtz. On notera bien évidemment la similarité avec l'acoustique géométrique (voir Sect. 2.1.3), en positionnant un certain nombre de sources à égale distance de l'arête.

L'idée est maintenant d'exprimer cette combinaison linéaire sous forme d'intégrale. On utilise pour cela le théorème des résidus. On doit définir judicieusement une nouvelle fonction. On considère une fonction holomorphe f de \mathbb{C} vers \mathbb{C} , sauf peut-être en quelques points $\{\theta_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq K \in \mathbb{N}\}$, appartenant à l'axe des réels. On peut maintenant définir la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}/\{\theta_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq K \in \mathbb{N}\} \\ \xi &\mapsto f(\xi)\mathcal{G}(\theta_R - \xi) \end{aligned}$$

Le produit $f(\xi)\mathcal{G}(\theta_R - \xi)$ est toujours holomorphe sur $\mathbb{C}/\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$, sauf éventuellement sur $\{\theta_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq K \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{C}/\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ si l'ensemble est non vide.

On peut alors appliquer le théorème des résidus à cette fonction pour un contour fermé C simple (i.e faisant un seul tour), qui ne passe pas par l'ensemble $\mathbb{C}/\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$, et qui entoure dans le sens trigonométrique l'ensemble $\{\theta_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq K \in \mathbb{N}\}$. On obtient alors :

$$2\pi j \sum_{k=1}^K \text{Res}(f, \theta_k) \mathcal{G}(\theta_R - \theta_k) = \oint_C f(\xi) \mathcal{G}(\theta_R - \xi) d\xi \quad (\text{III.2.7})$$

On a bien une combinaison linéaire de fonctions élémentaires de Green, solution de l'équation de Helmholtz et satisfaisant la condition de Sommerfeld. On peut montrer à l'aide du théorème de Cauchy que l'écriture de cette intégrale comme solution est valide pour n'importe quelle fonction f respectant les hypothèses ci-dessus, et est indépendante du contour, ainsi que des variables cachées de la fonction \mathcal{R} , sous couvert d'existence.

Un changement de variable et quelques arrangements donnent finalement une solution générale de l'équation de Helmholtz sous la forme :

$$\hat{p} = \hat{S} \oint_C f(\xi + \theta_R) \mathcal{G}(\xi) d\xi \quad (\text{III.2.8})$$

Toute la suite de la démonstration a pour but de trouver la bonne fonction f et le bon contour C pour que l'expression de l'équation III.2.8 soit aussi solution du problème aux limites, définies par l'Eq. (III.2.1).

Remarque : L'équation III.2.7 contient déjà l'idée d'une représentation du champ acoustique comme un ensemble de sources secondaires. L'équation III.2.7, sous sa forme de somme discrète, représente bien un ensemble de sources secondaires, chacune associée à une variable d'espace θ_k , qui sont vues par un receveur (associé à la variable θ_R) et pondérées par les résidus d'une certaine fonction f dont les pôles coïncident avec les θ_k . Ces sources ne sont cependant pas situées sur l'arête, mais sur un cercle centré sur le fil de l'arête, avec pour rayon r_S . On verra par la suite que lorsqu'il y a diffraction, la somme ne peut pas se mettre sous une forme discrète et mais peut toujours se mettre sous sa forme intégrale que l'on vient de définir. On montrera ensuite, en déformant le contour C , que l'on peut voir cette dernière comme la somme du champ direct, réfléchi, et d'un ensemble de sources secondaires situées sur l'arête.

2.1.3 Solution en présence de l'arête

Le *wedge index* :

On définit le *wedge index* ν tel que $\nu = \frac{\pi}{\theta_w} \geq \frac{1}{2}$. Cet indice, issu de l'acoustique géométrique, est relié au nombre d'images nécessaires pour établir l'expression du champ réfléchi. En effet, si ν est un entier, alors le problème peut être résolu uniquement par l'acoustique géométrique et le concept de source-image. Le terme \hat{p}_{diff} prend la valeur 0 [101].

On a alors $n_{\text{images}} = 2\nu - 1$, le nombre d'images que l'on retrouve par les lois de l'acoustique géométrique. Ainsi, dans le cas du plan, $\nu = 1$ et on a bien une image pour une source donnée. Si $\nu = 2$, on se retrouve du côté interne de deux plans perpendiculaires entre eux qui produisent bien 3 images sources. Une illustration pour $\nu = 3$ est donnée sur la Figure III.2.3. Plus de détails sont donnés dans la Sect. 2.1.3

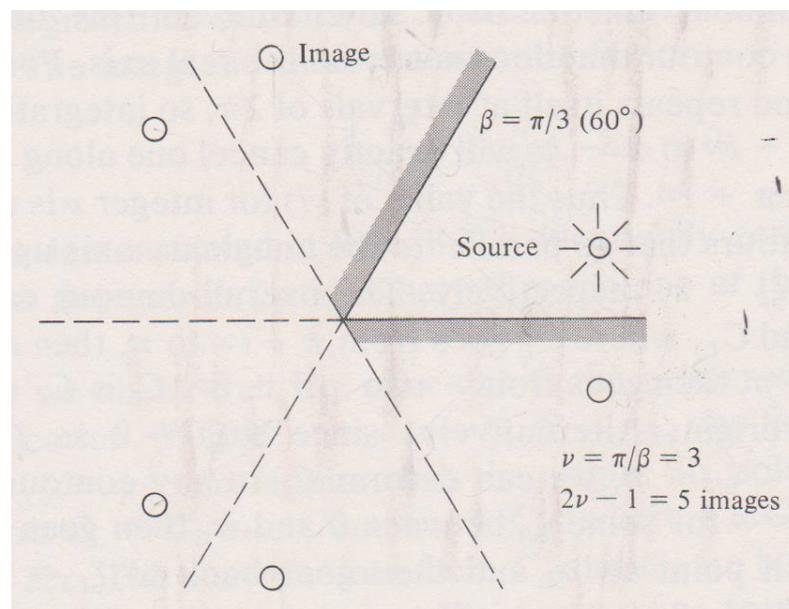


Figure III.2.3 – La construction des images d’une source dans le cas où le *wedge index* ν est un entier. On remarque que toutes les images, ainsi que la source, se trouvent sur un cercle centré sur l’origine. Pierce utilise β au lieu de θ_w en notation. D’après [101]

Trouver la fonction de pondération f et le contour C

Pour trouver la bonne fonction f , il faut s'intéresser au cas où ν est un entier. On a déjà mentionné qu'il était possible de résoudre le problème uniquement avec l'acoustique géométrique dans ce cas. Un exemple de construction d'images, lorsque la source est située dans un dièdre dont l'angle est un diviseur de 2π , est disponible sur la Figure III.2.3. Il est assez facile de montrer que le champ de pression peut s'écrire comme la somme du champ direct provenant de la source plus celui provenant des $2\nu - 1$ images. Partant de la source, et tournant dans le sens anti-trigonométrique, on construit par paires les images par symétrie. On constate que l'on retombe sur les mêmes images une fois le tour complet effectué. Cette propriété provient du fait que ν soit un entier et c'est pour cette raison que l'on peut résoudre uniquement par l'acoustique géométrique. La paroi étant parfaitement réfléchissante, on démontre facilement que pour ν entier :

$$\hat{p} = \hat{S} \sum_{m=0}^{\nu-1} \left[\mathcal{G} \left(\frac{2m\pi}{\nu} - \theta_S - \theta_R \right) + \mathcal{G} \left(\frac{2m\pi}{\nu} + \theta_S - \theta_R \right) \right] \quad (\text{III.2.9})$$

on réécrit alors cette expression avec le théorème des résidus, comme dans la section précédente. On obtient :

$$\hat{p} = \frac{\hat{S}}{2\pi j} \oint_C \mathcal{G}(\xi) [h(\xi + \theta_S + \theta_R) + h(\xi - \theta_S + \theta_R)] d\xi \quad (\text{III.2.10})$$

avec h une fonction périodique de période 2π , dont les pôles valent $2m\pi/\nu = 2m\theta_w$ et dont les résidus relatifs à chaque pôle sont l'unité ; et C est un contour entourant tout les pôles de h , i.e entourant un segment de l'axe des réels de longueur 2π (2π seulement pour ne pas compter plusieurs fois les mêmes contributions). Il faudra veiller à ce que le contour C ne franchissent pas le domaine $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ des points singuliers de G . Un exemple de C est visible sur la figure III.2.4.

On peut montrer [101] que la seule fonction h possible est unique et s'exprime par :

$$h(\xi) = \frac{\nu}{2} \frac{1}{\tan\left(\frac{\nu}{2}\xi\right)} = \frac{\nu}{2} \cotan\left(\frac{\nu}{2}\xi\right) \quad (\text{III.2.11})$$

Cette fonction satisfait bien toutes les hypothèses de la fonction f de la section précédente.

Dans le cas général, le contour C de la figure III.2.4 pose problème. En effet, celui-ci traverse l'axe des réels et risque donc de croiser le pôle éventuel de h situé en $\pi[2\pi]$. Cela violerait les conditions du théorème des résidus.

Pour palier ce problème, on utilise le théorème de Cauchy, qui nous permet de déformer le contour C autant que l'on souhaite, sous couvert de ne pas rajouter de pôles dans le lacet fermé de C . On déforme alors le contour C pour obtenir les contours C_U et C_L , visibles sur la partie gauche de la Figure III.2.5, auxquels il faut rajouter les deux lignes verticales pointillées pour être complet. Ces dernières sont en fait identiques, puisque l'intégrande de l'Eq. (III.2.10) est 2π -périodique. Puisqu'on les parcourt dans un sens puis dans l'autre, leurs contributions s'annulent, et le contour C est équivalent au contour $C_U + C_L$. On s'évite ainsi de couper l'axe des réels. En remarquant que l'on passe de C_L à C_U par la transformation $\xi \leftarrow -\xi$, on peut finalement obtenir une intégrale ne portant que sur le

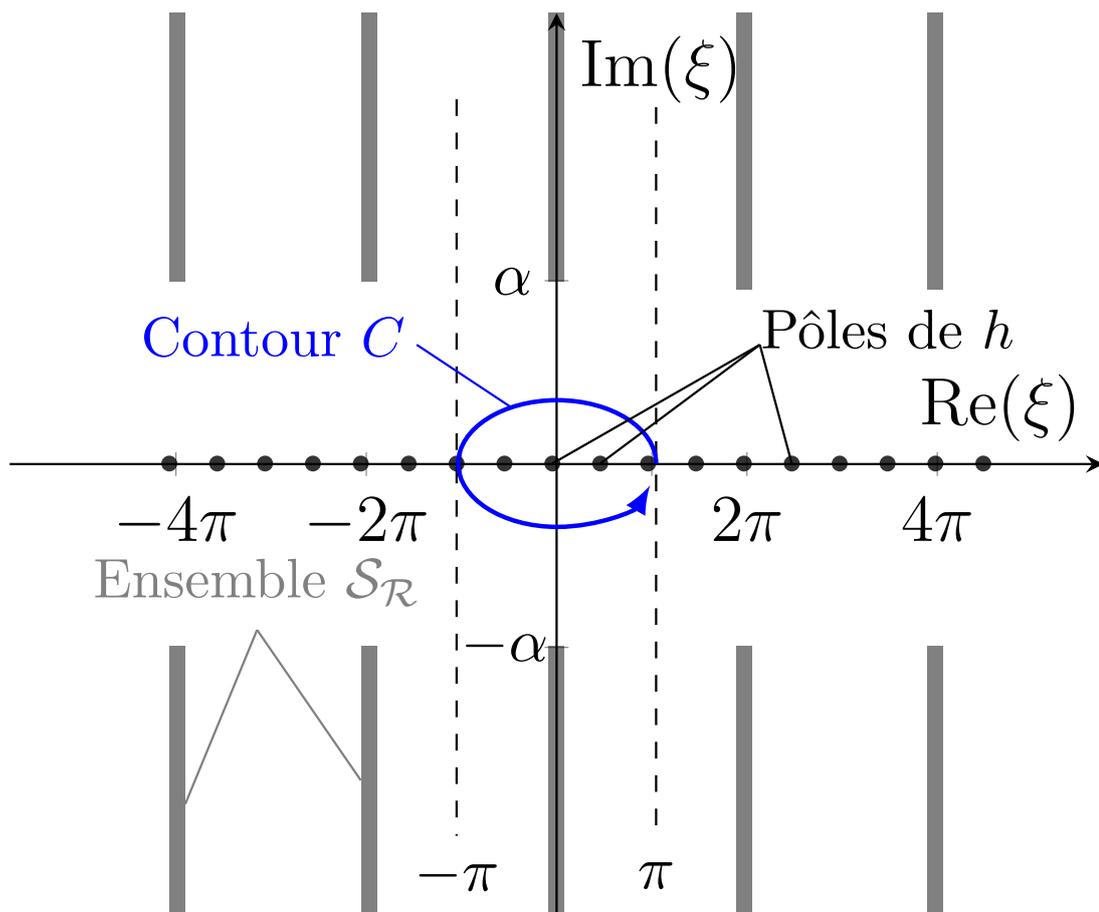


Figure III.2.4 – Le domaine $\mathbb{C}/\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ avec une représentation des pôles de h et un exemple de contour C .

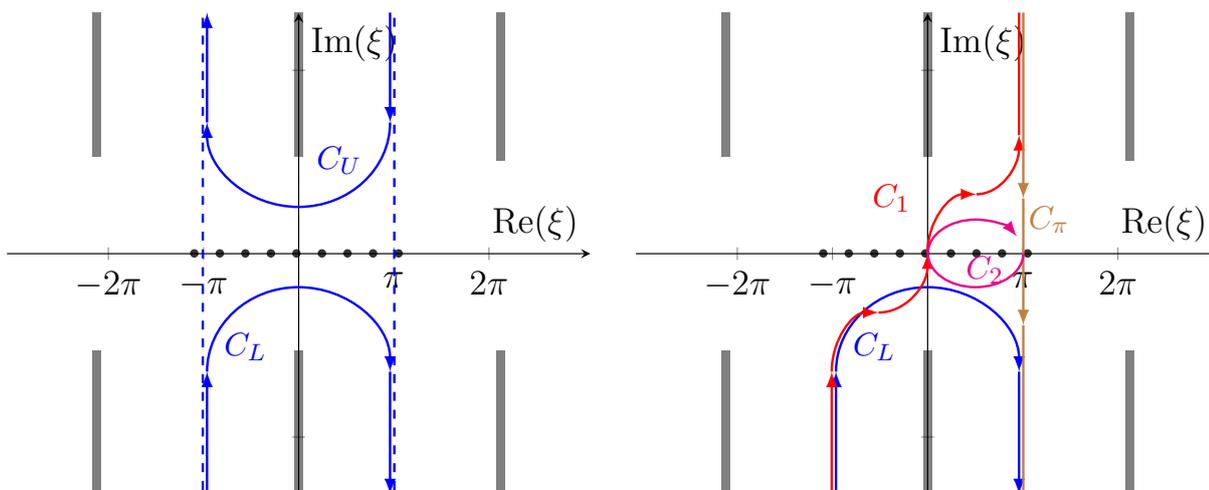


Figure III.2.5 – Gauche : Déformation du contour fermé C entourant les pôles en un contour équivalent qui ne franchit pas la droite des réels, i.e $C \leftarrow C_L + C_U$. Droite : Déformation du contour C_L permettant la séparation de la partie géométrique de la partie provenant de la diffraction. On a $C_L \leftarrow C_1 + C_2 + C_\pi$.

contour C_L :

$$\hat{p} = \frac{\hat{S}}{2\pi j} \int_{C_L} \mathcal{G}(\xi) \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \frac{\nu}{2} \cotan \left(\frac{\nu}{2} [\xi + (-1)^n \theta_R + (-1)^m \theta_S] \right) d\xi \quad (\text{III.2.12})$$

Cette solution est valide pour le cas ν entier. Mais on peut vérifier que l'Eq. (III.2.12) est bien solution du problème posé pour tout ν , en particulier pour ν non entier. Cette vérification est purement calculatoire et n'a pas d'intérêt pour notre approche. Le lecteur intéressé se référera à [101] pour plus de détails.

Séparation de la partie géométrique et de la partie diffractée du champ acoustique.

La solution de l'Eq. (III.2.12) ne permet pas en l'état de séparer la partie géométrique de la partie diffractée. On sait cependant par construction que la partie géométrique peut-être retrouvée en considérant un contour fermé entourant les pôles de la fonction h . On va donc déformer le contour C_L pour faire apparaître deux contours : un contour fermé entourant les pôles et un autre qui ne pourra représenter que la diffraction.

On décompose le contour C_L en deux contours $C_1 + C_\pi$, visibles sur la partie droite de la figure III.2.5. Parce que la nouvelle décomposition traverse deux fois le demi-axe des réels positifs qui contient des pôles, on est obligé d'ajouter le contour C_2 pour compenser le théorème des résidus. La décomposition fait en sorte que C_1 soit impair, ainsi la contribution de ce contour est nulle, au vu des propriétés de l'intégrande de l'Eq. (III.2.12).

On peut donc remplacer C_L par $C_2 + C_\pi$. On interprète alors la contribution apportée par le contour C_2 comme la partie géométrique de la solution. En effet, la symétrie qui nous a permis de passer du contour C_U au contour C_L nous permet également de prendre en considération uniquement la moitié des pôles pour complètement décrire la partie géométrique. Il est également possible de démontrer cette affirmation par le théorème des résidus. On peut enfin affirmer que la partie diffractée est entièrement décrite par la contribution du contour C_π . Ce contour peut se paramétrer avec la substitution $\xi \leftarrow \pi - is$, avec $s \in \mathbb{R}$. En utilisant la relation trigonométrique :

$$\cotan\left(\frac{\nu}{2}(x - is)\right) = \frac{\sin(\nu x)}{\cosh(\nu s) - \cos(\nu x)} \quad (\text{III.2.13})$$

On obtient finalement, en faisant le changement de variable $\xi \leftarrow \pi - is$, la contribution du champ diffracté dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{p}_{\text{diff}} = -\frac{\hat{S}}{4\theta_w} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\pi - is) \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \frac{\sin(\nu(\pi + (-1)^n \theta_R + (-1)^m \theta_S))}{\cosh(\nu s) - \cos(\nu(\pi + (-1)^n \theta_R + (-1)^m \theta_S))} ds \quad (\text{III.2.14})$$

qui est bien la formule recherchée.

Remarque : Dans l'état, il n'est pas possible d'interpréter cette formule comme une intégrale sur des sources secondaires situées sur l'arête. En effet, l'intégrale porte sur le paramètre s qui n'a pas de signification physique pour l'instant. De plus, la fonction G , lorsqu'elle prend ses valeurs dans \mathbb{R} , représente la distance directe entre la source S et le receveur R . Au delà du fait qu'elle prend ici ses valeurs dans \mathbb{C} , cette fonction ne contient même pas de notion de distance entre la source et l'arête, ou le receveur et l'arête. Il faut attendre l'identification de Svensson dans le domaine temporel pour accéder à cette interprétation (voir la Sect. 2.3.1).

Discontinuité de la décomposition aux frontières

Les contours C_2 et C_π , permettant la séparation, ont l'inconvénient de traverser à nouveau l'axe des réels. Le contour C_2 traverse l'axe des réels aux points $\xi = 0$ et $\xi = \pi$, et le contour C_π au point $\xi = \pi$ seulement. Ces points correspondent aux différentes frontières de la Figure III.2.2. En effet, en considérant la fonction h de l'Eq. (III.2.14), cela correspond au cas

$$\frac{\nu}{2}(\xi \pm \theta_S \pm \theta_R) = 0[\pi] \quad (\text{III.2.15})$$

soit

$$\xi \pm \theta_S \pm \theta_R = 0[2\theta_w] \quad (\text{III.2.16})$$

ce qui, pour la valeur $\xi = \pi$, correspond bien aux demi-plans représentés sur la Figure III.2.2 et pour la valeur $\xi = 0$ aux demi-plans complémentaires. Pour le cas du contour C_2 , ces difficultés sont facilement contournables en déformant légèrement ce dernier pour qu'il prenne en compte (ou non) les pôles problématiques. Cela revient à choisir dans quel domaine on inclut le demi-plan frontière, en l'excluant ainsi de l'autre domaine frontalier.

Le cas du contour C_π est plus délicat. Cela va dépendre du choix que l'on a fait pour C_2 . En effet, le champ diffracté doit compenser la discontinuité du champ géométrique. Si un pôle a été pris en compte dans la partie géométrique, il faut le retirer de la partie diffractée, et vice versa, en déformant légèrement le contour C_π autour du pôle. En revanche, il est très important de se rendre compte que la formule de l'Eq. (III.2.14) n'est *a priori* plus valable, puisque le changement de variable $\xi \leftarrow \pi - is$ ne l'est plus. En effet, l'intégrande étant singulière au point $s = 0$, même si on trouve un développement limité valide de celle-ci autour de ce point (comme cela est fait pour un cas légèrement différent dans la Sect. 2.3.3), rien ne nous assure que l'intégrale sur le contour C_π converge vers celle sur le contour déformé. En d'autres mots, il n'existe pas, à la connaissance des auteurs, de preuve que la décomposition du champ acoustique en terme de champ géométrique et diffracté existe lorsque le récepteur ou la source est sur un de ces plans.

2.2 Solution de Biot-Tolstoy

2.2.1 Principe de la démonstration de Biot-Tolstoy

La méthode de démonstration initialement utilisée par Biot-Tolstoy [14] se base sur une description modale du rayonnement acoustique, c'est-à-dire les fonctions propres de l'opérateur de Helmholtz (équation des ondes) relatives à un système de coordonnées orthogonales (voir Annexe C). Ce phénomène est très bien connu en milieu spatialement limité (par exemple une corde de longueur finie ou une cavité) où un nombre infini, mais discret, de modes indépendants apparaissent. On observe ce phénomène aussi pour des objets de taille finie, comme c'est le cas pour notre enceinte sphéroïdale du chapitre 2. Ces modes constituent une base et sont donc orthogonaux deux à deux. C'est bien le cas des harmoniques sphéroïdales du chapitre précédent. Biot propose une extension aux milieux infinis ou semi-infinis par un passage à la limite, ce qui aboutit à un ensemble de modes qui sont cette fois continus, mais toujours orthogonaux deux à deux, au sens de l'algèbre linéaire. Cette extension est basée sur des résultats généraux sur les vecteurs propres en algèbre. On formalise le problème de l'acoustique linéaire comme un ensemble de particules couplées à N degrés de liberté d'un point de vue de la mécanique Lagrangienne. Un passage astucieux vers la limite (i.e N tend vers l'infini) permet de retrouver les solutions de l'équation de Helmholtz dans n'importe quelles coordonnées, théoriquement pour n'importe quelles conditions aux limites. Le formalisme introduit permet d'exprimer la solution directement dans l'espace propre relatif aux coordonnées, sans faire l'hypothèse que celles-ci sont séparées. En ce sens, sa méthode est une généralisation de la méthode de séparation des variables. Les sources et forces extérieures sont ensuite exprimées grâce au formalisme des puissances virtuelles, outil classique de modélisation mécanique des milieux continus. La démonstration est remarquable, et l'application lorsque les variables sont séparables est immédiate. Elle est cependant plus difficile à interpréter d'un point de vue physique que la méthode de Pierce. De plus, Biot et Tolstoy ne donnent pas d'exemple d'application pour des variables non séparées. En particulier, l'expression des sources et forces extérieures lorsque les variables ne sont pas séparées est très difficile, comme par exemple dans le cas d'une enceinte rectangulaire avec condition de Neuman. On ne la décrira donc pas plus en détail dans ce manuscrit.

2.2.2 Formule de Biot-Tolstoy

Biot et Tolstoy fournissent la solution au problème dans le domaine temporel, sous forme de réponse impulsionnelle. Ils donnent la formule suivante :

$$h_{\text{diff}}(\tau) = \frac{-c}{2\theta_w r_S r_R} \frac{\beta(\tau)}{\sinh \eta(\tau)} H(\tau - \tau_0) \quad (\text{III.2.17})$$

avec H la fonction de *Heaviside*, $\tau_0 = \frac{1}{c} \sqrt{(r_S + r_R)^2 + z_R^2}$ le temps le plus court pour que le son se propage depuis la source vers le receveur en passant par l'arête, ainsi que :

$$\beta(\tau) = \beta_{++}(\tau) + \beta_{+-}(\tau) + \beta_{-+}(\tau) + \beta_{--}(\tau) \quad (\text{III.2.18})$$

et

$$\beta_{\pm\pm}(\tau) = \frac{\sin(\nu(\pi \pm \theta_R \pm \theta_S))}{\cosh(\nu\eta(\tau)) - \cos(\nu(\pi \pm \theta_R \pm \theta_S))} \quad (\text{III.2.19})$$

dont l'ensemble (équations III.2.18 et III.2.19) forment l'équivalent des 4 termes de la double somme dans l'expression de Pierce Eq. (III.2.14). On a aussi :

$$\eta(\tau) = \cosh^{-1} \left(\frac{c^2 \tau^2 - (r_R^2 + r_S^2 + z_R^2)}{2r_S r_R} \right) \quad (\text{III.2.20})$$

dont l'expression n'est pas sans rappeler la définition des points singuliers de la fonction \mathcal{G} dans l'Eq. (III.2.6). η est en fait l'équivalent du paramètre s (voir les Eqs. (III.2.13) et (III.2.14)). Le paramètre s parcourt un axe vertical dans le plan des complexes. Or, le domaine $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ décrit dans l'Eq. (III.2.6) est composé d'axes verticaux dans le plan complexe, privés d'un intervalle $[-\alpha, \alpha]$. La similarité mathématique des expressions était donc attendue, bien qu'elles n'aient aucune similarité *a priori* sur le plan de l'interprétation physique. Notons que cette fonction η n'est pas définie pour un temps $\tau < \tau_0$, ce qui ne pose pas de problème grâce à la présence de la fonction H dans l'Eq. (III.2.17).

2.2.3 Équivalence avec la formule BTM

On peut montrer ([33]) que l'on peut passer de l'expression de Biot à l'expression de Pierce en calculant la transformée de Fourier de l'expression III.2.17, puis en effectuant un changement de variable. Cette dernière opération permet de passer d'une variable d'intégration temporelle τ à une variable d'intégration abstraite η , comme suggérée par l'expression III.2.20. Plus de détails sur l'interprétation de ce changement de variable sont donnés dans la Sect. 2.3.2 et la Sect. 2.4

Notons qu'on l'on doit au préalable rassembler les termes $\beta_{++}(\tau)$ et $\beta_{--}(\tau)$ ensembles, et faire de même avec les termes $\beta_{+-}(\tau)$ et $\beta_{-+}(\tau)$ pour y parvenir. C'est l'opération inverse, dans la démonstration du modèle BTM, qui permet de passer du contour $C_U + C_L$ au contour C_L seul.

2.3 Formulation de Svensson

Dans cette section, on présente les formulations de Svensson dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Les expressions sont mathématiquement identiques à celles de Biot et Pierce. Elles sont cependant arrangées de telle sorte que le champ diffracté puisse être vu comme un ensemble de sources secondaires situées sur l'arête. Elles permettent de considérer les cas des arêtes finies.

2.3.1 Le champ diffracté dans le domaine temporel

Objectif : on veut montrer que, pour une arête finie (sur l'axe z entre les points z_1 et z_2) avec un angle d'ouverture de θ_w , la partie du champ acoustique diffractée par cette arête, émise par une source S et reçue au point R s'écrit :

$$p_{\text{diff}}(t) = -\frac{\nu}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} q \left[t - \frac{m(z) + l(z)}{c} \right] \frac{\beta(R, z, S)}{m(z)l(z)} dz \quad (\text{III.2.21})$$

où $\beta(R, z, S)$ est la même fonction que celle définie par les Eqs. (III.2.18) et (III.2.19) mais pour laquelle η est une fonction de z plutôt que de τ . Ce changement de variable est basé sur l'expression $c\tau = m(z) + l(z)$, avec m et l les distances de la Figure III.2.6.

Soit :

$$\eta = \cosh^{-1} \frac{(z - z_S)(z - z_R) - m(z)l(z)}{r_{SR}} \quad (\text{III.2.22})$$

Ce changement de variable peut sembler arbitraire, mais n'est pas innocent. L'hypothèse sous-jacente est que le paramètre τ représente le temps de propagation de l'onde sonore pour parcourir le trajet $m(z) + l(z)$. La preuve que l'Eq. (III.2.21) est juste validera *a posteriori* cette hypothèse.

Remarque 1 : cela veut dire qu'il n'y a pas de bijection entre les variables d'intégration τ et z car, à un temps τ , correspondent deux trajets possibles (voir Figure III.2.6). C'est la raison pour laquelle l'intégrale de l'Eq. (III.2.24) est bilatérale, alors que l'intégrale de l'Eq. (III.2.25) est unilatérale.

Remarque 2 : pour plus de clarté, on indique dans la notation de β la dépendance aux positions R et S . Ce n'est pas noté explicitement par Biot, mais c'est bien le cas dans son expression. Notons que β peut aussi se mettre sous une forme qui ne fait intervenir que des angles. En effet, à l'aide des relations trigonométriques, on peut montrer que η s'écrit [140] :

$$\eta = \cosh^{-1} \frac{1 + \sin(\alpha(z)) \sin(\gamma(z))}{\cos(\alpha(z)) \cos(\gamma(z))} \quad (\text{III.2.23})$$

avec α l'angle sous lequel le point z est éclairé par S et γ l'angle vers lequel il émet dans la direction du point R . Ces angles sont représentés sur la Figure III.2.6. Conformément aux Eqs. (III.2.18) et (III.2.19), $\beta(R, z, S)$ est donc une fonction qui ne dépend pas des distances $m(z)$ et $l(z)$.

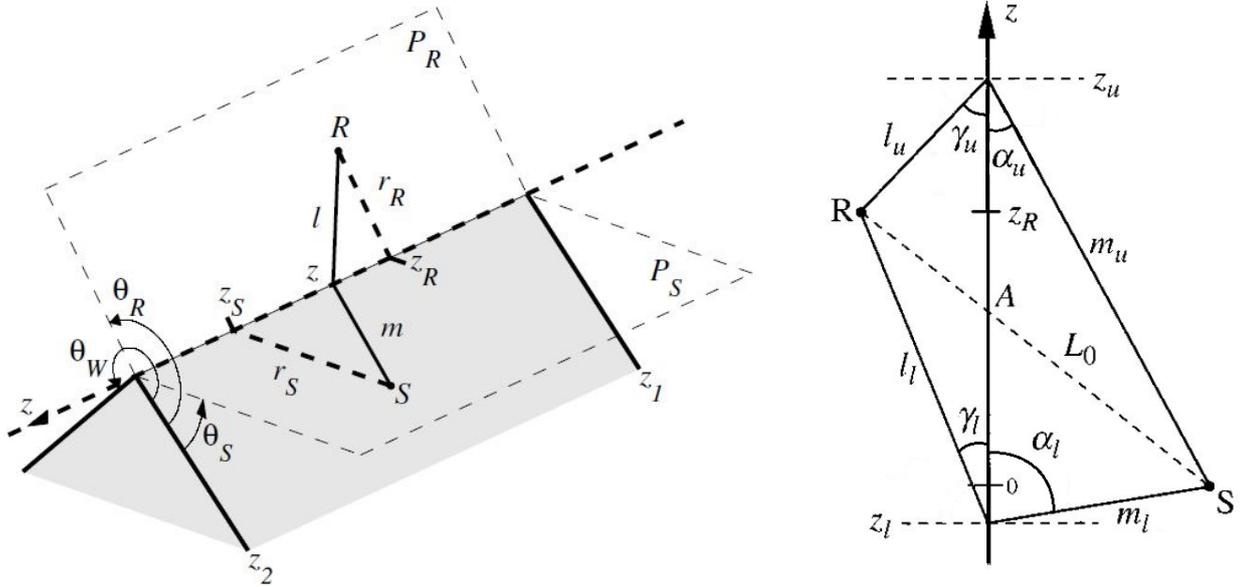


Figure III.2.6 – Paramètres géométriques utilisés dans les formules III.2.21 et suivantes. L'arête est sur l'axe Oz . Gauche : Les quantités m et l sont les distances relatives au trajet partant d'un point R vers une source S , en passant par un point z de l'arête. Droite : On représente dans les plans P_R et P_S deux trajets (repérés par les indices u et l , pour *up* et *low*) ainsi que leurs paramètres géométriques relatifs. Ces deux contributions ont la particularité d'avoir le même temps de parcours τ , ce qui veut dire qu'il n'y a pas de bijection entre les deux variables d'intégration τ et z . Cela explique pourquoi l'intégrale de l'Eq. (III.2.24) est bilatérale alors que l'intégrale de l'Eq. (III.2.25) est unilatérale. Le point A représente le point pour lequel le trajet est unique et minimum, appelé l'apex. Ce point appartient nécessairement à l'axe Oz , mais peut ne pas appartenir à l'arête, selon la position de R et S , si celle-ci est finie. Cette décomposition des trajets possibles en terme de temps de propagation identiques de part et d'autre du point A est nécessaire à l'obtention de l'équation III.2.25, voir [140] pour plus d'informations. D'après [140] (modifié) et [139].

Principe : on prend pour hypothèse que l'expression du champ diffracté peut s'interpréter selon le principe de Huygens-Fresnel, c'est-à-dire exprimable comme un ensemble de sources secondaires positionnées sur l'arête, et ayant une certaine directivité. On propose alors la formule :

$$p_{\text{diff}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q \left[t - \frac{m(z) + l(z)}{c} \right] \frac{D[\alpha(z), \gamma(z), \theta_S, \theta_R]}{m(z)l(z)} dz \quad (\text{III.2.24})$$

que l'on interprète de la manière suivante :

- Soit un point de l'arête repéré par son abscisse z . Les distances respectives de la source S au point z et du point z au receveur R sont notées $m(z)$ et $l(z)$ et sont telles que $m(z) = \sqrt{r_S^2 + (z - z_S)^2}$ et $l(z) = \sqrt{r_R^2 + (z - z_R)^2}$: cf Figure III.2.6.
- q est le modèle de source. Conformément au principe de Huygens, il sera identique à celui de la source S et retardé du temps de propagation relatif au point z de l'arête considérée (soit la distance $m + l$ divisée par la vitesse c du son). Par exemple, q sera une distribution de Dirac dans le cas d'une réponse impulsionnelle.
- La division par le produit de m et l représente l'atténuation en champ libre d'un champ acoustique d'une source ponctuelle.
- D est la directivité d'une source secondaire sur l'arête. Cette directivité dépend de l'angle α sous laquelle l'arête est éclairée ainsi que de l'angle γ vers lequel elle émet. On devrait donc parler en toute rigueur de directivité généralisée, mais on utilisera simplement directivité dans la suite du manuscrit. Cette directivité dépend également de la proximité angulaire des sources aux plans qui forment l'arête. Elle dépend donc également des angles θ_R, θ_S et du *wedge index* $\nu = \frac{\pi}{\theta_w}$. Cette directivité D , tout comme η , peut être exprimée en fonction de la position z ou du paramètre temporel τ de manière indifférente, au moyen du changement de variable précédent.

L'idée est maintenant de transformer l'intégrale de l'Eq. (III.2.24), dont la variable d'intégration z se trouve dans le domaine spatial, en une intégrale dont la variable d'intégration τ est dans le domaine temporel. On pourra ainsi l'identifier à un produit de convolution entre la source S exactement représentée par q et une réponse impulsionnelle, qui sera celle de la diffraction par l'arête.

Ce calcul est donné par Svensson dans [140]. Une étape importante de ce calcul passe par le rassemblement deux à deux des sources secondaires dont les temps de parcours τ sont identiques. En effet, comme illustré dans la Figure III.2.6, il existe deux points de part et d'autre de l'apex ayant un trajet de longueur égale. La contribution de l'arête à un temps τ comporte nécessairement la somme de ces deux contributions. Le calcul aboutit à l'Eq. (III.2.24) :

$$p_{\text{diff}}(t) = \int_{\tau_0}^{\infty} q(t - \tau_0) \frac{cH(\tau - \tau_0)}{r_S r_R \sin(\eta(\tau))} D(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} q(t - \tau_0) h_{\text{diff}}(\tau) d\tau \quad (\text{III.2.25})$$

Cette équation est bien une convolution dans le domaine temporel d'une source q avec une réponse impulsionnelle, qui ne peut être que le champ diffracté par l'arête, c'est à dire l'exacte définition de h_{diff} de la formule de Biot III.2.17.

Finalement, on trouve la directivité D par identification :

$$D[\alpha(z), \gamma(z), \theta_S, \theta_R] = -\frac{\nu}{4\pi} \beta[\alpha(z), \gamma(z), \theta_S, \theta_R] = -\frac{\nu}{4\pi} \beta(R, z, S) \quad (\text{III.2.26})$$

avec β l'expression donnée par les formules III.2.18 et III.2.19 et ν le *wedge index*

Hypothèse de l'arête finie : puisque l'identification est juste pour une arête infinie, et que l'intégrale fait maintenant explicitement intervenir le point courant de l'arête, Svensson fait l'hypothèse que cette formule est valable pour n'importe quelles bornes d'intégrations, en particulier pour des bornes finies, induisant des arêtes finies. On obtient bien dans ce cas l'expression III.2.21.

Cette hypothèse n'est pas triviale. Deux remarques à son propos peuvent être faites :

- La solution est présentée dans le domaine temporel, avec la variable temporelle z qui permet de parcourir l'arête. Si le projeté orthogonal de la source est contenu dans l'arête finie, le principe de causalité implique que cette formule est vraie au moins jusqu'à ce que la variable parcourant l'arête atteigne une extrémité de celle-ci. Dans ce cas, les premiers instants ne souffrent d'aucune (hypothétique) approximation. Ils sont d'autant plus étendus dans le temps que l'arête est grande et que le projeté de la source se situe en son centre.
- Une arête isolée finie est un objet théorique qui n'a pas de sens physique. En effet, puisque celle-ci est finie, les faces de l'arête se rejoignent nécessairement pour fermer l'objet rigide dont l'arête est une composante. Par exemple, si on considère que l'arête se termine par un plan (comme par exemple dans la Figure III.2.1), cela engendre nécessairement deux arêtes semi-infinies supplémentaires. Le cas d'une arête finie implique forcément de la diffraction d'ordre multiple. Cette remarque est aussi valide si l'arête se termine par une forme courbe. Cela va alors forcer les ondes rampantes à s'échapper de la surface.

Dans la pratique, la formule s'accorde remarquablement bien avec l'expérience, ou d'autres calculs, même lorsque l'apex de la source n'est pas sur l'arête. Cela laisse penser que cette hypothèse est valide. Il n'y a, à notre connaissance, pas de meilleur argument pour conforter cette hypothèse.

2.3.2 Le champ diffracté dans le domaine fréquentiel.

Remarque : Comme annoncé dans la Sect. 2.1.1, on utilise, à partir de cette section, la convention en $e^{i\omega t}$, conformément à la littérature. Cela explique notamment pourquoi le terme monopolaire de l'Eq. (III.2.27) possède un signe négatif dans l'exponentiel. Lorsque l'on compare ce modèle avec la BEM, on se replace dans la convention du BEM.

Par application directe de la transformée de Fourier sur l'expression III.2.21, et en considérant la source comme une source monopolaire de fréquence ω , (ramenée à une fonction de Green, voir Annexe B), on obtient [138] :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(1)}(k) = -\hat{S} \frac{\nu}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{e^{-jk[m(z)+l(z)]}}{m(z)l(z)} \beta(R, z, S) dz \quad (\text{III.2.27})$$

L'expression de la source dans le domaine fréquentiel étant une simple constante \hat{S} , elle peut être sortie de l'intégrale. Cette expression est l'exacte équivalent de l'expression III.2.14 lorsque l'arête est infinie. On peut dans ce cas passer de l'une à l'autre avec un changement de variable $s = \eta(z)$, et η défini dans l'Eq. (III.2.22), avec un calcul analogue à celui effectué par Chu dans [33]. Cependant, pour la formule de Pierce, nous avons déjà dit qu'il n'est pas possible d'interpréter le champ diffracté comme un ensemble de sources secondaires.

L'avantage de la formulation de Svensson est son interprétation physique immédiate. Pour cette raison, on travaillera avec cette expression pour la suite.

2.3.3 Singularités aux frontières

L'intégrande de l'équation Eq. (III.2.27) tout comme l'équation III.2.14, est singulière en un point. On a déjà montré dans la Sect. 2.1.3, que le point singulier $s = 0$ de l'équation III.2.14, correspondait aux limites des différentes zones (spéculaire et zone d'ombre, cf Figure III.2.2). En conséquence, il est difficile de calculer numériquement cette intégrale lorsqu'on est proche ou dans une de ces zones.

Lorsque le point R est situé sur un de ces plans, l'intégrande de l'expression III.2.27 est singulière en un point unique z_a , correspondant à la coordonnée z de l'apex A .

Cela peut-être interprété grâce au rassemblement illustré dans la partie droite de la figure III.2.6. En effet, pour obtenir l'équation III.2.25 et ainsi passer d'une variable spatiale à une variable temporelle, on a dû regrouper les contributions deux à deux ayant le même temps de parcours τ de R vers S , en passant par l'arête. (voir Sect. 2.3.1). Le point A étant unique, l'intégrale sur la variable spatiale est singulière. On peut cependant obtenir un développement limité de l'intégrande autour de ce point et ensuite d'utiliser la linéarité de l'intégrale pour la calculer [139] pour un point proche. On écrira :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(1)}(k) = -\hat{S} \frac{\nu}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{e^{-jk[m(z)+l(z)]}}{m(z)l(z)} \beta(R, z, S) dz = \int_{z_1}^{z_a-\varepsilon} \dots dz + \int_{z_a-\varepsilon}^{z_a+\varepsilon} \dots dz + \int_{z_a+\varepsilon}^{z_2} \dots dz \quad (\text{III.2.28})$$

Avec un ε assez "petit" (voir [139]). L'intérêt est alors de trouver une approximation pour l'intégrale centrale contenant le point z_a . Une telle approximation est donnée dans [139] et se résume comme suit :

La coordonnée en z du point A est :

$$z_a = \frac{z_R r_S + z_S r_R}{r_S + r_R} \quad (\text{III.2.29})$$

On cherche un équivalent en ce point de $\frac{\beta(R, z, S)}{m(z)l(z)}$. En effet, le terme $e^{-jk[m(z_a)+l(z_a)]}$ de l'Eq. (III.2.27) n'est pas singulier et peut donc être sorti de l'intégrale. On pose alors

$$z_{\text{rel}} = z - z_a \quad (\text{III.2.30})$$

En se rappelant que le terme β est composé de 4 termes (Eq. (III.2.18)), on peut alors

écrire au voisinage de 0 :

$$\frac{\beta_{\pm\pm}}{ml} \approx f_A(z_{rel}) = B_0 \cdot \frac{1}{z_{rel}^2 + B_1} \cdot \frac{1}{z_{rel}^2 + B_2 z_{rel} + B_3} \quad (\text{III.2.31})$$

avec

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{4R_0^2 \rho^3 \sin(\nu(\pi \pm \theta_R \pm \theta_S))}{\nu^2(1+\rho)^4[(1+\rho)^2 \sin^2 \psi - 2\rho]} & B_1 &= \frac{4R_0^2 \rho^2 \sin^2(\nu/2(\pi \pm \theta_R \pm \theta_S))}{\nu^2(1+\rho)^4} \\ B_2 &= -\frac{2R_0^2(1-\rho)\rho \cos(\psi)}{(1+\rho)[(1+\rho)^2 \sin^2 \psi - 2\rho]} & B_3 &= \frac{2R_0^2 \rho^2}{(1+\rho)^2[(1+\rho)^2 \sin^2 \psi - 2\rho]} \end{aligned} \quad (\text{III.2.32})$$

ainsi que ρ et ψ tels que ces équations soient satisfaites :

$$\rho = \frac{r_R}{r_S}, \quad \sin \psi = \frac{r_S + r_R}{R_0}, \quad \cos \psi = \frac{z_R - z_S}{R_0} \quad (\text{III.2.33})$$

Remarquons que seuls les coefficients B_0 et B_1 dépendent des angles θ_R et θ_S .

Remarque : Cette étude est valide d'un point de vue mathématique, elle passe sous silence le problème d'existence de cette intégrale lorsque le point est situé sur le plan. En effet, comme mentionné dans la Sect. 2.1.3, rien ne nous assure que cette limite correspond à la décomposition que l'on recherche. Cela pourrait expliquer en partie la difficulté, soulignée par les auteurs de [139], d'interpréter ce cas où le point est exactement sur la zone. Cette subtilité nous a poussés à ne pas implémenter, ni à étudier cette méthode dans la suite de ce manuscrit.

2.3.4 Expression alternative de la fonction β

On a vu, lors de l'établissement de la formule de Pierce, que les 4 termes de l'équation Eq. (III.2.18) sont, à l'origine, composés d'uniquement deux termes. Ces deux termes sont composés d'un terme source et son image par un plan, qui sont répliqués par symétrie autant de fois que nécessaire (voir la Figure III.2.3). Lorsque ν est un entier, ce duo de sources, relatif à un plan, coïncide avec le duo de l'autre plan. On passe ensuite de deux à quatre termes à la suite de considérations de symétrie sur les contours d'intégration. Pour l'interprétation, il peut être utile de rassembler à nouveau la fonction β sous forme de deux termes. En rassemblant les termes β_{++} et β_{--} ainsi que β_{+-} et β_{-+} de l'Eq. (III.2.27), et en utilisant les formules trigonométriques, on obtient :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(1)}(k) = -\hat{S} \frac{\nu}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{e^{-jk[m(z)+l(z)]}}{m(z)l(z)} 2 \sin(\nu\pi) [F(z, \theta_R + \theta_S) + F(z, \theta_R - \theta_S)] dz \quad (\text{III.2.34})$$

avec

$$F(z, \theta) = \frac{\cos(\nu\theta) - \cos(\nu\pi) + [\cosh(\nu\eta(z)) - 1] \cos(\nu\theta)}{[\cosh(\nu\eta(z)) - 1]^2 + 2[\cosh(\nu\eta(z)) - 1][1 - \cos(\nu\theta) \cos(\nu\pi)] + [\cos(\nu\theta) - \cos(\nu\pi)]^2}$$

Cette formule démontre explicitement que si ν est un entier, le champ diffracté est nul.

2.4 Interprétations physiques de la diffraction

L'étude des différentes formulations que l'on peut faire du champ diffracté nous permet d'en faire un certain nombre d'interprétation.

2.4.1 La diffraction sous forme de sources secondaires

En présence d'une arête parfaitement rigide et d'une source acoustique, si celle-ci, ainsi qu'un receveur R , ne sont pas sur un des plans limites de la Figure III.2.2, alors le champ acoustique à ce point R peut être vu comme la somme de la partie géométrique et du champ diffracté. Ce champ diffracté est la conséquence de cette décomposition mathématique du champ acoustique, qui force l'apparition de la partie géométrique. Dans ce cas, le champ diffracté peut être vu comme un ensemble de sources secondaires situées sur le fil de l'arête. Ces sources voient leurs directivités β dépendre des angles que forment la source primaire et le récepteur avec l'arête, et leurs intensités dépendre de leurs distances à celle-ci.

Ces sources sont généralement décrites au moyen d'une des paramétrisations suivantes :

- Leurs positions z sur l'arête. Cette représentation est celle privilégiée par Svensson et permet une interprétation directe du champ diffracté.
- Le temps τ auquel elles contribuent à la réponse impulsionnelle. Cette représentation, utilisée par Biot, est la représentation naturelle dans le domaine temporel. Elle permet de mettre en évidence le fait que le champ diffracté commence à se manifester uniquement après un temps τ_0 , par le biais de la fonction *heaviside* $H(\tau - \tau_0)$ dans l'Eq. (III.2.17). Il faut noter qu'à un temps τ correspondent deux positions z .
- La quantité abstraite $\eta(z) = \eta(\tau)$ qui permet de faire le lien entre les deux précédents. C'est aussi l'équivalent du paramètre s qui apparaît naturellement dans la démonstration de Pierce. Il est difficile de donner un sens physique à cette quantité, autre que cette paramétrisation.

2.4.2 Influence des sources secondaires

En utilisant la représentation de Svensson dans le domaine temporel, (Eq. (III.2.21)), on remarque que l'influence des sources secondaires diminue à mesure que l'on s'éloigne de l'apex. En effet, les distances m et l deviennent de plus en plus grandes lorsqu'on s'en éloigne, divisant ainsi l'intégrande par le produit de celle-ci.

Additionnellement, la fonction de directivité β tend elle aussi vers 0, à mesure que l'on s'éloigne de l'apex. En effet, le seul terme non trigonométrique dans son expression (Eqs. (III.2.18) et (III.2.19)) est le terme $\cosh^{-1}(\nu\eta)$, supérieur ou égal à 1, qui est au dénominateur. Ce terme vaut 1 lorsqu'on se situe à l'apex de l'arête (voir Sect. 2.3.3). La fonction \cosh^{-1} étant croissante, il suffit de montrer que la fonction η croît à mesure que l'on s'éloigne de l'apex, pour montrer que la directivité tend vers 0. La preuve est évidente en regardant l'expression Eq. (III.2.20), la fonction temps τ étant elle-même croissante. Remarquons également que pour des points R et S donnés, la fonction ne change pas de signe. La fonction $\frac{\beta}{ml}$ est à support borné autour de l'apex.

L'influence des sources secondaires tend donc rapidement vers 0 lorsque l'on s'éloigne de l'apex. En conséquence, si on est dans le cas d'une arête finie et que la source est le

receveur sont tels que l'apex n'appartienne pas à l'arête, le champ diffracté sera d'autant plus faible que l'apex est loin de l'arête. On retrouve ici une notion similaire au cône de diffraction de la théorie de l'acoustique géométrique.

2.4.3 Influence de la fréquence

Dans l'Eq. (III.2.27), on remarque que seul le terme exponentiel est complexe, terme oscillant à une fréquence spatiale k . Ces oscillations sont d'autant plus rapides que la fréquence temporelle augmente. Comme la fonction β prend ses valeurs dans les réels, conformément aux Eqs. (III.2.19) et (III.2.18), qu'elle est à support borné autour de l'apex et qu'elle ne change pas de signe pour des points R et S donnés (Sect. 2.4.2), elle remplit le rôle d'une enveloppe du terme oscillant. Une application du théorème de la phase stationnaire montre que cette intégrale tend vers 0 lorsque la fréquence augmente. L'influence du champ diffracté diminue bien avec la fréquence, ce qui confirme les hypothèses classiques de la théorie de l'acoustique géométrique.

2.4.4 Signe du champ diffracté

Le signe du champ diffracté change en fonction de la zone dans laquelle se trouve le receveur (voir Figure III.2.2). Cela s'explique par sa construction. En effet, le champ diffracté est le complémentaire du champ géométrique, pour former le champ total. La diffraction compense l'excès d'énergie apporté par cette représentation, si la partie géométrique sur-estime le champ total, et inversement. Le point important ici est que, contrairement aux interprétations des modèles simples (DED, GTD, UTD ...), les sources secondaires sur les arêtes sont artificielles. Elles changent de nature en fonction de la direction d'émission pour compenser la partie géométrique. Un modèle de source simple (comme par exemple un dipôle dans le modèle DED) n'est absolument pas recevable pour modéliser le champ dans toutes les directions de l'espace. Un autre point important est que le champ diffracté est fondamentalement une soustraction (d'un point de vue énergétique), d'où le signe $-$ qui le précède.

Pour s'en rendre compte, on peut considérer l'exemple d'un monopole sur un plan infini, i.e $\nu = 1$. Dans ce cas, il est bien connu que le champ de pression est doublé par rapport à celui du même monopole en champ libre.

Considérons maintenant le même monopole, positionné sur la face d'une arête à angle aigu (i.e $\nu < 1$), i.e un demi plan infini. Pour un receveur en face du monopole, l'acoustique géométrique nous propose le même résultat que dans le cadre du plan infini : le double du champ initial composé du champ direct et du le champ réfléchi. Or des ondes s'échappent par l'arête pour se rendre dans la zone d'ombre. Toute l'énergie du monopole n'étant pas réémise dans le demi-espace, le champ en face du monopole sera nécessairement plus faible que celui prédit par l'acoustique géométrique. Les sources secondaires de la diffraction prendront alors un signe négatif, pour compenser cette prédiction. À l'inverse, le champ acoustique prédit un champ nul dans la zone d'ombre, et les sources secondaires prendront donc un signe positif dans cette zone pour compenser. Pour garder l'équilibre énergétique, l'énergie apportée par le champ diffracté doit être nulle.

L'étude du signe du champ diffracté peut se faire au cas par cas, en examinant le sinus de l'expression Eq. (III.2.19), puisque le dénominateur est toujours supérieur à 0.

Toutefois, l'étude dans le cas général n'est pas simple, car la directivité est représentée par une somme de 4 termes (Eq. (III.2.18)), pour lesquels le dénominateur varie.

3 Méthode ESIE

Après avoir décrit la diffraction simple par une arête, on cherche à décrire maintenant ce qu'est la diffraction d'ordre supérieur. L'étude utilise la formulation de Svensson dans le domaine fréquentiel. On commence par l'exemple de la diffraction par deux arêtes successives. On montre ensuite comment on formalise une diffraction d'ordre n par un polyèdre sous forme d'opérateur. Enfin, on fera des remarques et on donnera des détails sur l'implémentation d'un tel modèle.

3.1 Diffraction par deux arêtes successives

3.1.1 Description phénoménologique

Considérons deux arêtes Z_1 et Z_2 avec une face commune, (voir Figure III.3.1), une source S et un point R , tous en vision directe deux à deux, et les points S et R n'étant pas sur des plans problématiques (voir Sect. 2.3.3). On a montré dans la section précédente que le champ reçu par le point R peut être décomposé comme la somme du champ direct \hat{p}_{direct} , du champ réfléchi \hat{p}_{GA} et du champ diffracté \hat{p}_{diff} . Comme il y a deux arêtes, la contribution de ce dernier est plus compliquée que la simple intégrale de l'Eq. (III.2.27). Le champ diffracté peut être décomposé avec la notion d'ordre.

En effet, comme le champ direct illumine une arête, celle-ci se comporte comme une source secondaire qui va alors illuminer le point R . C'est le champ diffracté d'ordre 1, que l'on note $\hat{p}_{\text{diff}}^{(1)}$. Bien évidemment, puisqu'il y a deux arêtes, le champ direct illumine la première et la seconde arête. Le champ diffracté d'ordre 1 est donc composé de deux contributions, représentées en bleu sur la Figure III.3.1. On note :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(1)} = \hat{p}_{\text{diff}}^{(1)}[S \rightarrow Z_1 \rightarrow R] + \hat{p}_{\text{diff}}^{(1)}[S \rightarrow Z_2 \rightarrow R] \quad (\text{III.3.1})$$

Mais puisqu'une arête se comporte comme une source secondaire, celle-ci illumine aussi l'autre arête qui va à son tour, se comporter comme une source secondaire pour illuminer le point R . C'est le champ diffracté d'ordre 2, que l'on note $\hat{p}_{\text{diff}}^{(2)}$. Encore une fois, la contribution totale est composée de deux contributions, représentées en vert sur la Figure III.3.1. On note :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(2)} = \hat{p}_{\text{diff}}^{(2)}[S \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow R] + \hat{p}_{\text{diff}}^{(2)}[S \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow R] \quad (\text{III.3.2})$$

On peut procéder de la même manière pour définir l'ordre 3, puis l'ordre 4 et ainsi de suite. Le champ diffracté total, noté \hat{p}_{diff} , sera composé des contributions de tous les ordres. On a :

$$\hat{p}_{\text{diff}} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_{\text{diff}}^{(n)} \quad (\text{III.3.3})$$

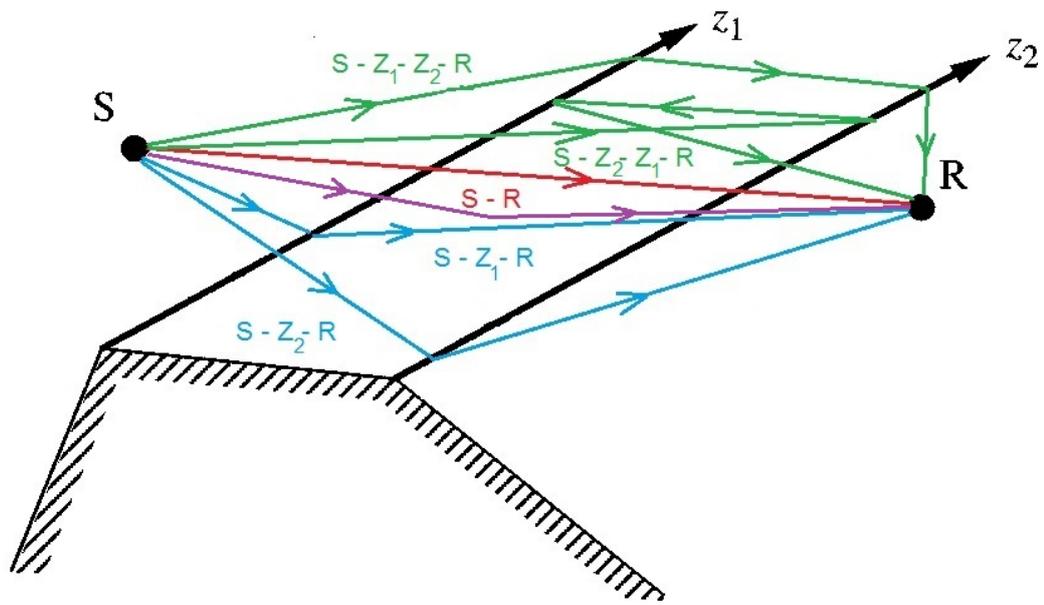


Figure III.3.1 – Contributions du champ diffracté allant jusqu'à l'ordre 2, reçu par le point R en présence de deux arêtes Z_1 et Z_2 pour une source S. On représente un trajet possible pour une contribution, mais la contribution totale est l'intégrale sur la ou les arête(s) concernée(s). Le champ direct et le champ réfléchi sont également représentés, respectivement par les couleurs rouge et violette. Le point R et S voient tous les deux les arêtes Z_1 et Z_2 . Il existe donc deux contributions pour le champ diffracté d'ordre 1, représentées en bleu. Il existe également deux contributions pour le champ diffracté d'ordre 2, qui sont représentées en vert.

3.1.2 Convergence

La convergence de l'Eq. (III.3.3) est souvent justifiée d'un point de vue physique dans la littérature. On peut aussi se contenter de la constater, comme par exemple dans [25, 136, 8].

Sinon, on évoque des arguments énergétiques pour la justifier. En effet, la méthode est, par construction, à énergie conservative, et donc la somme converge nécessairement. Un autre argument consiste à affirmer que chaque terme de la série est plus petit que son prédécesseur. En effet, on construit le champ diffracté pour compenser le surplus d'énergie apporté par la partie géométrique du champ acoustique. L'énergie du champ diffracté d'ordre 1 est donc nécessairement plus petite que le champ géométrique. Le champ diffracté d'ordre 2 est construit en considérant le champ diffracté d'ordre 1 comme source principale, il est donc nécessairement plus petit. Et ainsi de suite. Ce dernier argument, bien qu'aidant à se convaincre de la convergence, n'est cependant pas suffisant, car une suite décroissante n'est pas nécessairement convergente.

3.1.3 Contribution du champ diffracté d'ordre 2

Expression

L'expression d'une contribution de l'ordre 2, dont le trajet partant de S passe successivement par deux arêtes avant d'atteindre le point R, est obtenue avec une méthode analogue à celle utilisée pour obtenir l' Eq. (III.2.27). En effet, on a montré à la Sect. 2.3.1 que la formule de l'Eq. (III.2.21) est valide pour n'importe quel modèle de source q , et que le champ diffracté est interprété comme un ensemble de sources secondaires sur l'arête, ayant une certaine directivité. Il suffit donc de considérer cet ensemble de sources comme une source primaire pour la seconde arête.

On note Z_1 l'arête aux bornes z_{11} et z_{12} , et Z_2 l'arête aux bornes z_{21} et z_{22} . La contribution du champ diffracté d'ordre 2, lorsque la source S illumine l'arête Z_2 , puis lorsque celle-ci illumine à son tour l'arête Z_1 , s'écrit alors :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(2)} [S \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow R](k) = \hat{S} \frac{1}{2} \frac{\nu_2 \nu_1}{(4\pi)^2} \int_{z_{11}}^{z_{12}} \int_{z_{21}}^{z_{22}} \frac{e^{-jkr_{R \rightarrow z_1}}}{r_{R \rightarrow z_1}} \frac{e^{-jkr_{z_1 \rightarrow z_2}}}{r_{z_1 \rightarrow z_2}} \frac{e^{-jkr_{z_2 \rightarrow S}}}{r_{z_2 \rightarrow S}} \beta(R, z_1, z_2) \beta(z_1, z_2, S) dz_1 dz_2 \quad (\text{III.3.4})$$

z_1 et z_2 désignant respectivement deux points quelconques des arêtes Z_1 et Z_2 ; ν_1 et ν_2 leurs *wedge index* respectifs et $r_{X \rightarrow Y}$ la distance cartésienne d'un point X à un point Y .

Remarquons que le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'équation III.3.4 ne serait pas présent s'il n'y avait pas de face commune aux dièdres formant les arêtes Z_1 et Z_2 . En effet, dans ce dernier cas, le trajet entre Z_1 et Z_2 serait en champ libre et non sur la surface. Ce facteur $\frac{1}{2}$ est le pendant du monopole sur une surface plane, qui voit son amplitude doublée par rapport au même monopole en champ libre (voir Sect. 2.4.4).

On démontre sa présence en étudiant la limite du champ direct et du champ réfléchi, lorsqu'une source se rapproche de la face commune aux arêtes Z_1 et Z_2 . Ces deux champs

tendent alors à se confondre. Or, seul la composante relative au champ direct illuminera l'arête Z_1 , l'autre moitié ne l'atteignant pas. La source de l'arête Z_2 étant elle-même sur la face commune, seul la moitié de celle-ci vient illuminer l'arête Z_1 .

Notons que la formule III.3.4 supporte l'hypothèse implicite que les deux arêtes sont non concourantes. Si celles-ci le sont, il y a apparition d'un point singulier dû à la division par la distance $r_{z_1 \rightarrow z_2}$. Ce problème n'est pas traité dans la littérature, mais est facilement esquivable (voir Sect. 4.2).

Reformulation avec un terme source

Pour remettre l'Eq. (III.3.4) sous une forme similaire à l'Eq. (III.2.27), on écrit :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(2)} [S \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow R](k) = -\frac{1}{2} \frac{\nu_1}{4\pi} \int_{z_{11}}^{z_{12}} \int_{z_{21}}^{z_{22}} \hat{q}^{(1,0)} [S \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1](z_2, z_1) \frac{e^{-jk[r_{R \rightarrow z_1} + r_{z_1 \rightarrow z_2}]}}{r_{R \rightarrow z_1} r_{z_1 \rightarrow z_2}} \beta(R, z_1, z_2) dz_1 dz_2 \quad (\text{III.3.5})$$

avec

$$\hat{q}^{(1,0)} [S \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1](z_2, z_1) = -\hat{S} \frac{\nu_2}{4\pi} \frac{e^{-jkr_{z_2 \rightarrow S}}}{r_{z_2 \rightarrow S}} \beta(z_1, z_2, S) \quad (\text{III.3.6})$$

Dans ce cas, le terme $q^{(1,0)}$ est bien une source (à la position z_2) et le reste de l'équation est similaire à l'Eq. (III.2.27) au facteur $\frac{1}{2}$ et à la seconde intégrale sur Z_2 près. Cette seconde intégrale est la conséquence de la dépendance de β (la directivité de la source) à son angle d'illumination. C'est aussi pour cette raison que la source est une fonction de deux variables z_1 et z_2 qui dépend encore du point S. Les Eqs. (III.3.4) et (III.3.5) ne peuvent être exprimées comme deux intégrales simples puisque le β est non séparable. Cela justifie la notation (1, 0) en exposant, qui souligne son caractère bi-directionnel (voir la Figure III.3.3).

Cette remarque est fondamentale car si le problème peut effectivement être interprété comme un ensemble de sources sur des arêtes (de dimension 1), le problème reste quand-même à deux dimensions, à cause de la directivité. En reprenant la technique des éléments finis (Sect. 3 du chapitre 1), on se rend compte que les intégrales portent sur des surfaces, traduisant la complexité à deux dimensions du problème. Ce n'est pas parce que l'on considère uniquement les arêtes du problème que le problème se simplifie, du fait de la fonction β . En conséquence, on verra dans la Sect. 4.2 que la discrétisation nécessaire des arêtes lors du calcul numérique est plus fine que la classique règle de 6 éléments par longueur d'onde en éléments finis. Le calcul reste complexe, malgré son apparente simplicité.

3.1.4 Contribution du champ diffracté d'ordre 3 et plus

De la même manière que l'on a établi l'Eq. (III.3.4), on obtient pour l'ordre 3 :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(3)} [S \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z'_2 \rightarrow R](k) = (-1)^3 \hat{S} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{\nu_2 \nu_1 \nu_2}{(4\pi)^3} \int_{z_{21}}^{z_{22}} \int_{z_{11}}^{z_{12}} \int_{z'_{21}}^{z'_{22}} \frac{e^{-jk[r_{R \rightarrow z'_2} + r_{z'_2 \rightarrow z_1}]} e^{-jkr_{z_1 \rightarrow z_2}} e^{-jkr_{z_2 \rightarrow S}}}{r_{R \rightarrow z'_2} r_{z'_2 \rightarrow z_1} r_{z_1 \rightarrow z_2} r_{z_2 \rightarrow S}} \beta(R, z'_2, z_1) \beta(z'_2, z_1, z_2) \beta(z_1, z_2, S) dz'_2 dz_1 dz_2 \quad (\text{III.3.7})$$

On désigne alors par z'_2 une variable indépendante de la variable z_2 qui parcourt l'arête Z_2 , que l'on appelle alors Z'_2 pour clarifier. On souhaite alors réécrire cette équation en faisant apparaître un terme source, comme pour l'Eq. (III.3.5).

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(3)} [S \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z'_2 \rightarrow R](k) = -\frac{1}{2} \frac{\nu_2}{(4\pi)} \int_{z_{11}}^{z_{12}} \int_{z'_{21}}^{z'_{22}} \hat{q}^{(2,1)} [\dots Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z'_2](z_1, z'_2) \frac{e^{-jkr_{R \rightarrow z'_2}} e^{-jkr_{z'_2 \rightarrow z_1}}}{r_{R \rightarrow z'_2} r_{z'_2 \rightarrow z_1}} \beta(R, z'_2, z_1) dz'_2 dz_1 \quad (\text{III.3.8})$$

avec

$$\hat{q}^{(2,1)} [\dots Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z'_2](z_1, z'_2) = -\frac{1}{2} \frac{\nu_1}{4\pi} \int_{z_{21}}^{z_{22}} \hat{q}^{(1,0)} [S \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1](z_2, z_1) \frac{e^{-jkr_{z_1 \rightarrow z_2}}}{r_{z_1 \rightarrow z_2}} \beta(z'_2, z_1, z_2) dz_2 \quad (\text{III.3.9})$$

et $\hat{q}^{(1,0)} [S \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1](z_2, z_1)$ la quantité définie par l'Eq. (III.3.6). On remarque alors que les relations III.3.5 et III.3.8 sont identiques aux indices près et que l'on retrouve la quantité $q^{(1,0)}$. On peut également faire du terme source $q^{(2,1)}$ une interprétation analogue du terme $q^{(1,0)}$, c'est-à-dire comme une source à la position z_1 .

Finalement, on constate que l'on peut passer de la quantité $q^{(1,0)}$ à la quantité $q^{(2,1)}$ par l'Eq. (III.3.9). Cette équation décrit comment une arête "primaire" illumine une autre arête "secondaire". De la même manière, on pourra toujours trouver une relation entre les $\hat{q}^{(n,n-1)}$ et les $\hat{q}^{(n-1,n-2)}$, en considérant la bonne combinaison d'arêtes. On pourra alors calculer le champ diffracté d'ordre $n+1$ reçu au point R par l'Eq. (III.3.8) (identique à l'Eq. (III.3.5)).

On voit clairement se dessiner deux opérateurs : un permettant d'incrémenter l'ordre et un autre permettant d'évaluer le champ en un point R . On verra que l'on peut définir formellement ces opérateurs pour un polyèdre dans la Sect. 3.2.2

3.2 Application à un polyèdre convexe

Un polyèdre est une surface fermée dans l'espace 3D, composée d'un assemblage de surfaces planes. Il est convexe si, pour deux points quelconques pris à l'intérieur du volume

défini par sa surface, le segment de droite reliant ces deux points ne sort pas de ce volume au sens strict.

Soit une source S et un point R à l'extérieur ou sur la surface du polyèdre, qui ne sont pas sur un plan problématique (voir Figure III.3.2 pour un exemple de ces plans avec le cube). On a :

$$\hat{p}_S(R) = \hat{p}_{\text{direct}} + \hat{p}_{\text{GA}} + \hat{p}_{\text{diff}} \quad (\text{III.3.10})$$

et

$$\hat{p}_{\text{diff}} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_{\text{diff}}^{(n)} \quad (\text{III.3.11})$$

Dans la suite, on montre comment calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_{\text{diff}}^{(n)}$, \hat{p}_{direct} et \hat{p}_{GA} étant calculés avec les lois de l'acoustique géométrique classique.

3.2.1 Calcul du champ direct, réfléchi et diffracté d'ordre 1

Considérons un polyèdre convexe parfaitement rigide, possédant N_p arêtes, ainsi qu'un point source S et un receveur R . On peut créer une matrice de "facteurs de visibilité" $V = \{V_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N_p}$ symétrique pour laquelle chaque terme V_{ij} vaut 1 si l'arête Z_i est directement visible depuis l'arête Z_j , et 0 sinon. On pose $V_{ii} = 0, \forall i$ par convention. On définit aussi deux vecteurs V_i^S et V_i^R représentant les "facteurs de visibilité" des arêtes par les points S ou R , de la même manière. Cette formalisation ne prend pas en compte le cas où une arête est "à moitié" visible par un point, mais ce cas ne se présente jamais si le polyèdre est convexe.

Résoudre le problème du champ reçu par un point R , en présence d'une source S et d'un polyèdre convexe avec N_p arêtes, se fait dans une logique de description par rayon, en propageant le champ diffracté d'arête en arête. C'est cependant différent d'une approche par rayon proprement dite, telle que celle de la théorie de la GTD par exemple, pour laquelle l'énergie n'est pas conservée [130].

Dans cette section, on ne considère qu'une source monopolaire (ramenée à une fonction de Green, voir Annexe B) pour simplifier, mais l'extension du modèle pour une source plus complexe est immédiate grâce aux expressions de la Sect. 2.3 (voir Sect. 4.3.2 pour une source étendue).

On commence par calculer le champ direct de S sur R et le champ réfléchi par un polyèdre, reçu par R , s'ils existent. Puis on calcule le champ diffracté d'ordre 1 reçu par R , en faisant la somme de toutes les contributions par les arêtes vues par S et par R . On a :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(1)}(R) = -\hat{S} \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_p} V_i^S V_i^R \nu_i \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} \frac{e^{-jkr_{R \rightarrow z_i}}}{r_{R \rightarrow z_i}} \frac{e^{-jkr_{z_i \rightarrow S}}}{r_{z_i \rightarrow S}} \beta(R, z_i, S) dz_i \quad (\text{III.3.12})$$

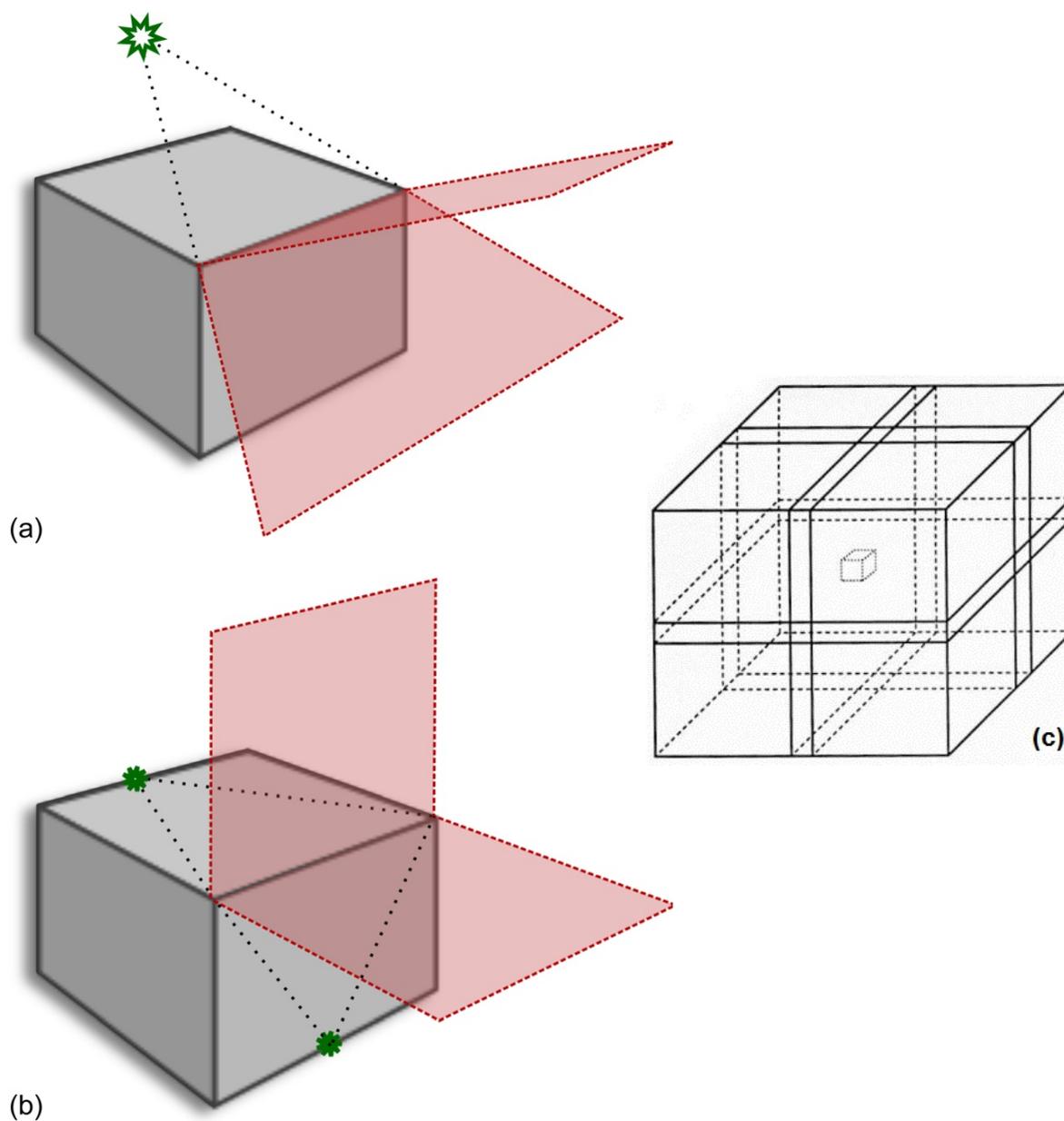


Figure III.3.2 – Plans problématiques pour un polyèdre : exemple du cube. Les plans en rouge indiquent les positions du point R pour lesquelles la fonction β est singulière. (a) Exemple des deux plans relatifs à une arête au premier ordre de diffraction. (b) Idem pour les ordres supérieurs à 2. (c) Découpage de l'espace extérieur du cube par tous les plans problématiques possibles des ordres supérieurs à 2. (a) et (b) d'après [8]

Remarque : Le champ réfléchi n'apparaîtra pas lors du calcul des ordres supérieurs puisque l'on a supposé le polyèdre convexe et que les sources (*i.e* les arêtes) sont maintenant sur le polyèdre. Cette remarque fait écho à la remarque de la Sect. 3.1.3. On simplifie ainsi considérablement les calculs. C'est un autre avantage du polyèdre convexe.

3.2.2 Calcul du champ diffracté d'ordre 2 et plus

Formalisation en opérateurs et termes sources

On calcule les ordres supérieurs en définissant des termes sources initiaux $q^{(1,0)}$ de la Sect. 3.1.3 pour tout le polyèdre, ainsi que l'opérateur permettant d'incrémenter ce terme source d'un ordre de diffraction et l'opérateur permettant d'évaluer le champ diffracté d'ordre n à partir du terme source $q^{(n-1,n-2)}$.

D'une manière générale, les termes sources q sont des fonctions de deux variables z_i et z_j qui décrivent le rayonnement d'une source secondaire z_i appartenant à une arête Z_i du polyèdre, lorsqu'elle émet dans la direction d'un point z_i appartenant à une autre arête de ce même polyèdre. Ces termes contiennent l'information décrivant comment ces sources secondaires z_i sont éclairées par les ordres inférieurs. Cette information, en addition de l'angle d'émission, suffit à décrire complètement une source. On abandonnera la notation entre crochets des Sect. 3.1.3 et Sect. 3.1.4, étant entendu que la variable z_i indique que l'on considère l'arête Z_i , avec $1 \geq i \geq N_p$.

Les termes sources initiaux $q^{(1,0)}$ permettant de calculer l'ordre 2 sont alors définis par :

$$\hat{q}^{(1,0)}(z_j, z_i) = -V_j^S V_{ij} \hat{S} \frac{\nu_j}{4\pi} \frac{e^{-jkr_{z_j \rightarrow S}}}{r_{z_j \rightarrow S}} \beta(z_i, z_j, S) \quad 1 \geq i, j \geq N_p \quad (\text{III.3.13})$$

On définit ensuite l'opérateur d'incrémentation \mathcal{I}_+ , qui décrit l'influence d'une arête Z_p sur un point z_i d'une arête Z_i au travers d'un point z_j d'une arête intermédiaire Z_j . Soit :

$$\mathcal{I}_+\{Z_i, q^{(n-1,n-2)}(z_p, z_j)\} = -\frac{1}{2} \frac{\nu_j}{4\pi} \int_{z_{p1}}^{z_{p2}} \hat{q}^{(n-1,n-2)}(z_p, z_j) \frac{e^{-jkr_{z_j \rightarrow z_p}}}{r_{z_j \rightarrow z_p}} \beta(z_i, z_j, z_p) dz_p \quad (\text{III.3.14})$$

Pour incrémenter les termes sources, il faut sommer toutes les contributions provenant du point z_j qui atteignent le point z_i . On doit pour cela prendre en compte toutes les arêtes visibles par le point z_j . On a donc :

$$\hat{q}^{(n,n-1)}(z_j, z_i) = V_{ij} \sum_{p=1}^{N_p} \mathcal{I}_+\{Z_i, q^{(n-1,n-2)}(z_p, z_j)\} \quad (\text{III.3.15})$$

Enfin, on définit l'opérateur d'évaluation \mathcal{I}_{ext} permettant d'évaluer la contribution au champ diffracté d'un terme source $q^{(n,n-1)}$ en un point R extérieur au polyèdre. Il consiste à sommer les contributions d'une arête, elle-même étant illuminée par une autre arête. Soit :

Definitions. On appelle Γ l'ensemble des arêtes $\{Z_i, 1 \leq i \leq N_p\}$ et ζ la variable qui parcourt cet ensemble. L'Eq. (III.3.13) devient alors

$$\hat{Q}^{(1,0)}(\zeta_2, \zeta_1) = -V_2'^S V_{12}' \hat{S} \frac{\nu_2}{4\pi} \frac{e^{-jkr_{\zeta_2 \rightarrow S}}}{r_{\zeta_2 \rightarrow S}} \beta(\zeta_1, \zeta_2, S) \quad (\text{III.3.18})$$

Les facteurs de visibilité $V_2'^S$ et V_{12}' gardant une définition analogue aux facteurs de visibilité précédemment définis. Le terme $\hat{Q}^{(1,0)}(\zeta_2, \zeta_1)$ est en fait l'union de toutes les fonctions $\hat{q}^{(1,0)}(z_j, z_i), 1 \leq i, j \leq N_p$. Grâce aux propriétés de linéarité de l'intégrale, cela permet d'écrire l'Eq. (III.3.15) sous la forme d'un opérateur \mathcal{I} similaire à celui de l'Eq. (III.3.14) mais contenant déjà le facteur de visibilité, i.e :

$$\mathcal{I}\{\hat{Q}^{(n-1, n-2)}\}(\zeta_2, \zeta_1) = -\frac{1}{2} \frac{\nu_2}{4\pi} V_{12}' \int_{\zeta_3 \in \Gamma} \hat{Q}^{(n-1, n-2)}(\zeta_3, \zeta_2) \frac{e^{-jkr_{\zeta_2 \rightarrow \zeta_3}}}{r_{\zeta_2 \rightarrow \zeta_3}} \beta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) d\zeta_3 \quad (\text{III.3.19})$$

ce qui permet d'écrire directement :

$$\hat{Q}^{(n, n-1)} = \mathcal{I}\{\hat{Q}^{(n-1, n-2)}\} \quad (\text{III.3.20})$$

De la même manière, on pourra définir un opérateur $\mathcal{I}_{\text{prop}}$ similaire à l'opérateur \mathcal{I}_{ext} mais contenant déjà le facteur de visibilité de l'Eq. (III.3.17). On aura alors :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(n)}(R) = \mathcal{I}_{\text{prop}}\{R, \hat{Q}^{(n-1, n-2)}\} \quad (\text{III.3.21})$$

On a donc les relations simples suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{p}_{\text{diff}}^{(2)} &= \mathcal{I}_{\text{prop}}\{R, Q^{(1,0)}\} \\ \hat{p}_{\text{diff}}^{(3)} &= \mathcal{I}_{\text{prop}}\{R, \mathcal{I}\{\hat{Q}^{(1,0)}\}\} \\ \hat{p}_{\text{diff}}^{(4)} &= \mathcal{I}_{\text{prop}}\{R, \mathcal{I}\{\mathcal{I}\{\hat{Q}^{(1,0)}\}\}\} = \mathcal{I}_{\text{prop}}\{R, \mathcal{I}^2\{\hat{Q}^{(1,0)}\}\} \\ &\dots \\ \hat{p}_{\text{diff}}^{(n)} &= \mathcal{I}_{\text{prop}}\{R, \mathcal{I}^{n-2}\{Q^{(1,0)}\}\} \end{aligned} \quad (\text{III.3.22})$$

Sommes des termes sources. Un autre avantage de cette formulation apparaît lorsqu'on cherche à calculer le champ diffracté en une seule opération. En utilisant l'Eq. (III.3.22) et l'Eq. (III.3.11), on a :

$$\hat{p}_{\text{diff}} = p_{\text{diff}}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{I}_{\text{prop}}\{R, \mathcal{I}^{n-2}\{Q^{(1,0)}\}\} \quad (\text{III.3.23})$$

ce qui, en exploitant les propriétés de linéarités de l'opérateur $\mathcal{I}_{\text{prop}}$, donne :

$$\hat{p}_{\text{diff}} = p_{\text{diff}}^{(1)} + \mathcal{I}_{\text{prop}} \left\{ R, \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{I}^{n-2}\{Q^{(1,0)}\} \right\} \quad (\text{III.3.24})$$

Or, l'opérateur \mathcal{I} étant lui-même linéaire, on reconnaît une série de Neuman. En assumant que celle-ci converge (voir Sect. 3.1.2), on peut facilement calculer sa limite à l'aide

de l'opérateur identité $\mathbb{1}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{I}^{n-2} \{Q^{(1,0)}\} = (\mathbb{1} - \mathcal{I})^{-1} \{Q^{(1,0)}\} \quad (\text{III.3.25})$$

Il est donc théoriquement possible de résoudre la diffraction en deux étapes : une première étape d'inversion, où on inverse l'opérateur $\mathbb{1} - \mathcal{I}$ puis une étape d'évaluation avec l'opérateur $\mathcal{I}_{\text{prop}}$. Ces étapes sont très similaires aux deux étapes de la méthode BEM (voir Sect. 3 du chapitre 1).

Cependant, dans la pratique, l'opérateur \mathcal{I} est difficile à construire numériquement (voir Sect. 4.3), à cause de la fonction tridimensionnelle $\beta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, coûteuse en terme de mémoire. L'étape d'inversion est dans la plupart des cas inatteignable. Dans la pratique, on se contente de calculer un grand nombre d'ordre de diffraction par application directe des opérateurs selon l'Eq. (III.3.22). Pour la cette raison, utiliser l'implémentation de Svensson demande beaucoup de mémoire pour construire les opérateurs, mais est plus efficace d'un point vue temps de calcul. En revanche, la formulation avec les opérateurs \mathcal{I}_{ext} et \mathcal{I}_+ permet de découper le calcul plus facilement et de pouvoir ainsi utiliser l'algorithme sur des machines modestes, au prix d'un temps de calcul plus long. C'est cette dernière version que nous avons implémentée. Plus de détails sur l'implémentation sont donnés dans la Sect. 5.1.3.

4 Application à une enceinte rectangulaire et implémentation

Dans cette section, on décrit succinctement notre implémentation du modèle ESIE lorsqu'il est appliqué à une enceinte. On souligne notamment les simplifications que la géométrie apporte, la façon dont on a abordé les problèmes soulevés par le calcul numérique, et enfin comment étendre le modèle de source ponctuelle à une source étendue.

4.1 Cas particulier du polyèdre rectangulaire

On se place dans le cas particulier où le polyèdre est rectangulaire. Cette géométrie simple permet de faire des simplifications dans le modèle. Notre implémentation est valide uniquement pour ce cas particulier.

4.1.1 Hypothèses géométriques et conséquences

Toutes les enceintes étudiées sont rectangulaires, et la source est toujours située sur une face de ce pavé droit. On utilise les notations de la Figure III.4.1. On peut faire les constatations suivantes :

- La source S étant sur une face, le champ réfléchi est identique au champ direct.
- Le polyèdre est composé de 3 groupes de 4 arêtes identiques. Chaque arête peut en voir 6 autres.
- On a toujours $\theta_w = \pi/2$ et donc $\nu = 2/3$.

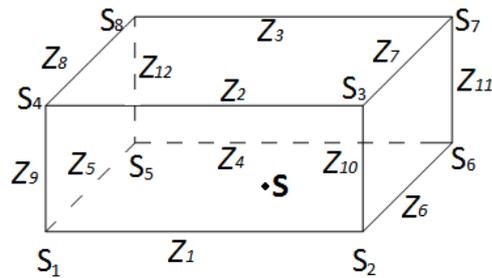


Figure III.4.1 – Le parallélépipède rectangle composé de 8 sommets singuliers $S_1 \dots S_8$ et 12 arêtes $Z_1 \dots Z_{12}$. La source \mathbf{S} est située sur la face avant, composée des arêtes Z_1 , Z_2 et Z_9 et Z_{10} où des points S_1 , S_2 , S_3 et S_4 . Les arêtes Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 sont de longueur a . Les arêtes Z_5 , Z_6 , Z_7 , Z_8 sont de longueur b . Les arêtes Z_9 , Z_{10} , Z_{11} , Z_{12} sont de longueur c .

- Les arêtes sont soit perpendiculaires et concourantes avec des arêtes de longueur différentes (au niveau des coins), soit parallèles avec des arêtes de même longueur (au niveau des faces).
- Il existe 26 cas différents pour les valeurs V_i^R , correspondant à 26 régions de l'espace, selon la position du point R . Ces régions sont illustrées dans la Figure III.3.2.
- Le polyèdre est une "boîte" et la source S est sur une des faces de la boîte : il est nécessaire d'aller au moins jusqu'à l'ordre 2 pour couvrir les 26 régions, c'est-à-dire qu'un point de l'espace R ait au moins un terme non nul provenant du champ diffracté.

4.1.2 Facteurs de Visibilité

Visibilité inter-arête : V_{ik}

La géométrie du polyèdre étant assez simple, on choisit de calculer à la main la matrice V de la Sect. 3.2.1. En considérant les notations de la Figure III.4.1, on obtient la matrice :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4.1})$$

Conformément aux remarques de la Sect. 4.1.1, chaque arête voit bien exactement 6 arêtes

Visibilité arêtes - points extérieurs : V_i^R

On note (x_R, y_R, z_R) les coordonnées cartésiennes du point R , dans un repère dont le centre se situe au milieu de l'enceinte rectangulaire. On cherche les facteurs de visibilité V_i^R correspondants. Comme précédemment, la géométrie étant assez simple, on peut faire une partie du calcul à la main. En effet, il suffit de déterminer dans laquelle des 26 régions se trouve le point R , pour y associer les arêtes visibles correspondantes.

Il y a 3 types de régions possibles. En effet, le point R peut voir 4, 7, ou 9 arêtes selon s'il se trouve en face d'une face, d'une arête ou d'un coin de l'enceinte. Un exemple pour les deux premiers types de région est donné sur la Figure III.4.2. Une comparaison de la valeur absolue des coordonnées (x_R, y_R, z_R) à $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ et $\frac{c}{2}$, (dimensions de l'enceinte) nous permet de déterminer facilement dans quel type de région il se trouve. Ensuite, l'examen du signe des coordonnées détermine complètement la région recherchée. On rappelle que

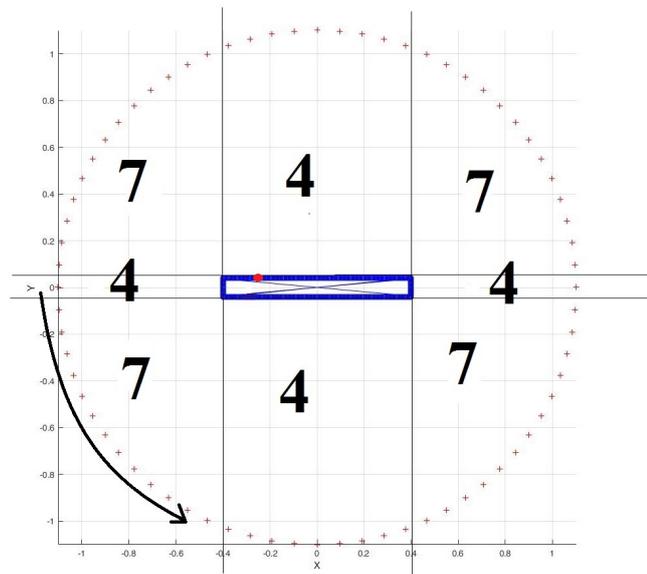


Figure III.4.2 – Représentation dans le plan horizontal des plans singuliers (traits continus) de la fonction β , aussi visibles en 3D sur la Figure III.3.2, et des récepteurs R (+) dans ce plan, dans le cas de l'enceinte A. On indique également le nombre d'arêtes visibles par les points R en fonction de leur position dans l'espace. Le cas d'un point R voyant 9 arêtes n'est pas représenté ici car les récepteurs R sont tous dans le plan horizontal. La flèche indique le sens de parcours des récepteurs sur la Figure III.5.1

le cas où le point R est exactement situé sur un point singulier n'est pas pris en compte dans ce manuscrit.

4.2 Calcul numérique

4.2.1 Schéma d'intégration numérique

Le calcul des opérateurs \mathcal{I}_+ et \mathcal{I}_{ext} des Eqs. (III.3.16) et (III.3.14) nécessite un schéma d'intégration numérique. Le sujet a été abordé par Calamia dans sa thèse [25] et son article [24]. Il propose une méthode pour optimiser le calcul de ces intégrales en répartissant les points de calcul autour de l'apex, en fonction de la position des points R et S . Dans le cas d'un polyèdre, cette technique nécessite une nouvelle discrétisation de l'arête pour toutes les combinaisons possibles des couples de points (z_i, z_j) appartenant à deux arêtes différentes. Le coût de calcul d'une telle méthode est bien trop élevé pour être appliqué au cas d'un polyèdre.

Le sujet est également abordé par Asheim dans [7] qui propose une méthode pour calculer l'ordre 1 avec la méthode de *Steepest descent*, qui est une variante de la procédure de quadrature de Gauss adaptative. Cette méthode n'est pas applicable à l'ordre 2 pour les mêmes raisons que précédemment. Son implémentation nous obligerait à faire une discrétisation différente pour l'ordre 1 et l'ordre 2. On a décidé de ne pas implémenter cette méthode. De plus, les résultats obtenus avec la méthode choisie sont suffisants pour la précision voulue, ce qui nous conforte dans notre choix.

La méthode de quadrature de Gauss avec une discrétisation fixe par arête a aussi été brièvement envisagée. Cependant, la position du maximum de l'intégrande change en fonction des couples (z_i, z_j) , ce qui rend impossible l'optimisation de la répartition des points de Gauss sur les arêtes. Cette méthode n'a donc pas été retenue.

On a finalement choisi de faire l'intégration par la méthode des trapèzes, ce qui permet une discrétisation régulière des arêtes et une implémentation simple.

4.2.2 Discrétisation des arêtes

Conformément au schéma d'intégration de la Sect. 4.2.1, on a discrétisé chaque arête de manière régulière pour pouvoir appliquer la méthode des trapèzes. On discrétise chaque arête en N_a , N_b et N_c points, selon le groupe d'arêtes considéré (voir Figure III.4.1), tel que $z_i = x \frac{i}{N_x + 1}$, $1 \leq i \leq N_x$. De cette manière, on ne prend pas en compte le début et la fin du segment pour éviter les singularités du terme monopolaire dans les Eqs. (III.3.16) et (III.3.14). Les quantités N_a , N_b et N_c sont choisies de sorte à ce que la distance entre chaque point soit la même pour les trois groupes d'arêtes.

La question primordiale de cette discrétisation est de savoir quelle est la distance minimum Δ_z nécessaire entre deux points pour que le calcul converge à une fréquence donnée. Rappelons que dans le cas de la BEM, on retient généralement un minimum de 6 points par longueur d'onde (voir Sect. 3.2.1 du chapitre 1). Cette valeur vient de l'Eq. (I.3.10) (équation de Kirchhoff-Helmholtz), qui fait intervenir dans l'intégrande une fonction de Green entre deux points d'une même surface. Cela permet de représenter

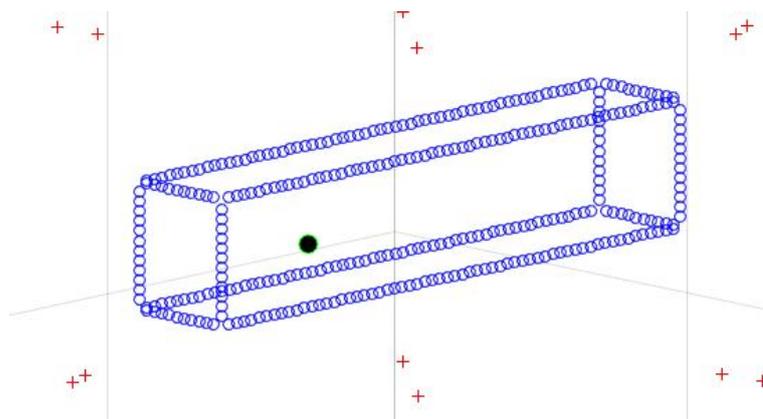


Figure III.4.3 – Exemple de discrétisation des arêtes pour l'enceinte A.

correctement la partie harmonique de cette fonction de Green (i.e une fonction sinusoïdale) sans phénomène de recouvrement spatial.

Dans le cas de la diffraction, l'intégrande de l'Eq. (III.2.27) peut être vu comme une fonction enveloppe pondérée par une fonction oscillante (voir Sect. 2.4.3). Cependant, la fonction oscillante est fonction de la distance entre le point d'émission et le point d'illumination passant par l'arête z (le trajet $m(z)+l(z)$) et non pas d'un point parcourant la même arête. Si cela avait été le cas, on aurait pu se contenter d'appliquer le même critère que pour les éléments finis. Ici cependant, l'interprétation est plus complexe. La discrétisation doit être telle que la plus grande variation $m(\Delta_z)+l(\Delta_z)$ d'un trajet relatif à deux points de part et d'autre de l'arête soit inférieure au sixième de la longueur d'onde. Cette condition doit être remplie pour tous les trajets possibles relatifs à une arête, c'est à dire pour tous les couples possibles pour le point d'émission et le point d'illumination. Cette étude dépend donc fortement de la forme du polyèdre.

Dans cette thèse, on se contente d'une étude empirique pour choisir la discrétisation. Différents pas Δ_z ont été testés, permettant de vérifier que la solution obtenue était correcte. On montre quelques résultats à ce propos dans la Sect. 5.1.2. L'étude de tous les trajets possibles d'un polyèdre donné pour obtenir une règle de discrétisation n'est pas inaccessible. C'est une des perspectives possibles de ce travail.

4.2.3 Ordre de diffraction nécessaire

La diffraction est décrite avec la notion d'ordre, qui représente le nombre d'arêtes successives que l'on considère. Pour une bonne description du champ acoustique, on veut analyser le nombre d'ordres minimum nécessaires pour obtenir une bonne estimation de la somme convergente de l'Eq. (III.3.3). Ce nombre dépend bien évidemment de la fréquence, puisque l'on sait que le champ diffracté tend vers 0 lorsque la fréquence augmente (voir Sect. 2.4.3). Aux très hautes fréquences, la partie géométrique est suffisante.

En revanche, il est intéressant de constater que l'on peut définir un nombre maximum d'ordres à prendre en compte pour atteindre une précision donnée, par rapport à une géométrie donnée. En effet, puisque la formulation est valide pour toute fréquence, le cas de la fréquence nulle joue le rôle de limite. De plus, cet ordre limite ne dépend

que de la géométrie (i.e du ratio de forme) et ne dépend pas des dimensions absolues du problème. En effet, dans l'Eq. (III.2.27), seul le terme exponentiel dépend de la fréquence (voir Sect. 2.4.3).

Remarque : Parler d'ordre n est pertinent du point de vue du polyèdre mais moins du point de vue physique. En effet cette description se base sur une description "par rayons" et des formulations que l'on peut faire en considérant un objet composé uniquement de faces plates et d'arêtes saillantes. D'un point de vue du phénomène physique, il serait plus logique d'analyser le franchissement des arêtes en terme de temps de propagation, ou de distance parcourue sur l'arête. Par exemple, dans le cadre de l'enceinte A, l'ordre 2 considère aussi bien des trajets d'une dizaine de centimètres que des trajets de plusieurs mètres. L'ordre 3 contient donc des contributions qui arrivent avant l'ordre 2 du point de vue temporel.

4.3 Source étendue et méthode d'implémentation

4.3.1 Calcul des opérateurs

Comme annoncé dans la Sect. 3.2.2, on a choisi d'implémenter la méthode en utilisant la formalisation basée sur les opérateurs \mathcal{I}_{ext} et \mathcal{I}_+ plutôt que celle de Svensson, basée sur les opérateurs $\mathcal{I}_{\text{prop}}$ et \mathcal{I} . Concrètement, cela veut dire que l'on recalcule la fonction β à chaque fois que c'est nécessaire, plutôt que de la calculer une fois pour tous les cas possibles et la stocker ensuite sous la forme d'un opérateur matriciel. Cette dernière approche est celle qui est implémentée dans la toolbox de ESIE sous matlab de Svensson¹, que l'on a utilisée pour obtenir les directivités 3D de la Sect. 5. Le problème d'une telle approche est que l'on peut être rapidement limité par la mémoire disponible.

Un exemple numérique est donné dans [136]. Si on discrétise un cube avec 50 éléments par arête, on obtient un nombre total de 300 points pour tout le cube. Pour l'opérateur $\mathcal{I}_{\text{prop}}$, cela représente pas moins de 180 000 termes par point R considéré. Pour l'opérateur \mathcal{I} , cela représente 32.4 milliards de termes. En revanche, un grand nombre de ces termes sont nuls. Par exemple, pour l'opérateur \mathcal{I} , seuls 54 millions de termes sont non nuls. Néanmoins, la gestion de telles quantités de termes nécessite des techniques spécifiques. En particulier, une simple implémentation avec les outils relatifs aux matrices *sparse* dans Matlab n'est pas suffisante. Il faut en plus des outils qui puissent gérer les doublons de calculs. Svensson a développé ses propres fonctions en ce sens, et c'est pour cette raison que ces scripts sont plus rapides que les nôtres. En effet, si on arrive à créer les matrices relatives aux opérateurs $\mathcal{I}_{\text{prop}}$ et \mathcal{I} , l'application de ces opérateurs est ensuite quasiment immédiate, rendant le calcul des ordres supérieurs quasiment instantané. Dans notre implémentation, chaque ordre nécessite un temps de calcul supplémentaire. En revanche, notre méthode de calcul ne nécessite pas beaucoup de mémoire pour fonctionner.

1. <http://www.iet.ntnu.no/~svensson/software/index.html>

4.3.2 Extension à une source étendue

Jusqu'à présent, on a décrit le modèle de diffraction avec une source ponctuelle. Il est cependant simple de l'étendre au cas d'une source étendue

Formulation pour une source étendue

Pour étendre la formulation à une source étendue, il suffit de changer les expressions de la partie géométrique, du champ diffracté d'ordre 1 et les termes sources $q^{(1,0)}$ de l'Eq. (III.3.13). Les opérateurs \mathcal{I}_{ext} et \mathcal{I}_+ sont indépendants de la source.

Pour ce faire, une solution simple consiste à utiliser l'intégrale de Rayleigh, qui représente la solution exacte d'un piston dans un plan infini. En considérant que le piston occupe une surface S et vibre avec une distribution de vitesse initiale $v_0(\vec{y} \in S)$, avec la convention en $e^{-i\omega t}$ on pose :

$$\hat{p}_{\text{direct}} + \hat{p}_{\text{GA}} = \frac{j\omega\rho}{2\pi} \int_{\vec{y} \in S} v_0(\vec{y}) \frac{e^{-jkr_{R,\vec{y}}}}{r_{R,\vec{y}}} dS \quad (\text{III.4.2})$$

Le champ diffracté d'ordre 1 découle directement de l'Eq. (III.3.12) :

$$\hat{p}_{\text{diff}}^{(1)}(R) = -\frac{j\omega\rho}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_p} V_i^S V_i^R \nu_i \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} \int_{\vec{y} \in S} \frac{e^{-jkr_{R \rightarrow z_i}}}{r_{R \rightarrow z_i}} \frac{e^{-jkr_{z_i \rightarrow \vec{y}}}}{r_{z_i \rightarrow \vec{y}}} \beta(R, z_i, \vec{y}) dS dz_i \quad (\text{III.4.3})$$

ainsi que les termes $q^{(1,0)}$ de l'Eq. (III.3.13) :

$$\hat{q}^{(1,0)}(z_j, z_i) = -V_j^S V_{ij} \frac{j\omega\rho}{4\pi} \int_{\vec{y} \in S} \frac{e^{-jkr_{z_j \rightarrow \vec{y}}}}{r_{z_j \rightarrow \vec{y}}} \beta(z_i, z_j, \vec{y}) dS \quad 1 \geq i, j \geq N_p \quad (\text{III.4.4})$$

Conséquence sur le calcul numérique

L'implémentation du modèle de source étendue ne pose pas de difficulté. On choisit d'abord un schéma d'intégration (Quadrature de Gauss ou intégration trapézoïdale), qui définit un certain nombre de points appartenant à une face de l'enceinte. Ensuite, en utilisant les propriétés de linéarité des opérateurs, le calcul des Eqs. (III.4.2), (III.4.3) et (III.4.4) est équivalent à calculer autant de fois les Eqs. (III.3.12) et (III.3.13) (auxquelles on rajoute le champ direct) qu'il y a de points d'intégration, puis de les sommer selon le schéma d'intégration choisi. On peut ensuite appliquer les opérateurs des Eqs. (III.3.15) et (III.3.17).

Dans la pratique, cela rallonge le calcul considérablement (le temps de calcul des Eqs. (III.3.12) et (III.3.13) est linéaire avec le nombre de points d'intégration), et n'amène pas d'information supplémentaire. En effet, dans la plage de fréquence que l'on considère (i.e < 3 kHz), l'hypothèse du point source suffit à expliquer l'essentiel de ce qui est observé sur les mesures. Pour simplifier, on présente dans la partie résultats uniquement le cas du point source.

5 Résultats

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus avec le modèle ESIE. On commence par examiner rapidement les paramètres relatifs au modèle ESIE. Puis on compare les prédictions du modèle ESIE avec le modèle BEM. Cette comparaison met en évidence un effet d'interférences constructives, qui déplace le lobe d'émission principal de l'enceinte A (ou crée un double lobe). L'effet est d'autant plus fort que le haut-parleur est excentré sur le baffle. Cela nous amène à considérer l'enceinte C de l'Annexe A pour lequel le haut-parleur est très excentré. On compare ensuite le modèle ESIE et les mesures de cette enceinte, pour montrer que dans ce cas extrême le lobe principal est fortement décalé de l'axe du haut-parleur. De manière contre-intuitive, le lobe se décale dans la direction opposée au décalage du haut-parleur par rapport au centre du baffle.

5.1 Paramètres du modèle ESIE

Dans cette section, on regarde en premier lieu l'influence des ordres de diffraction pris en compte pour prédire la directivité d'une enceinte, puis l'influence du nombre de points avec lequel on discrétise les arêtes et enfin le temps de calcul du modèle de diffraction.

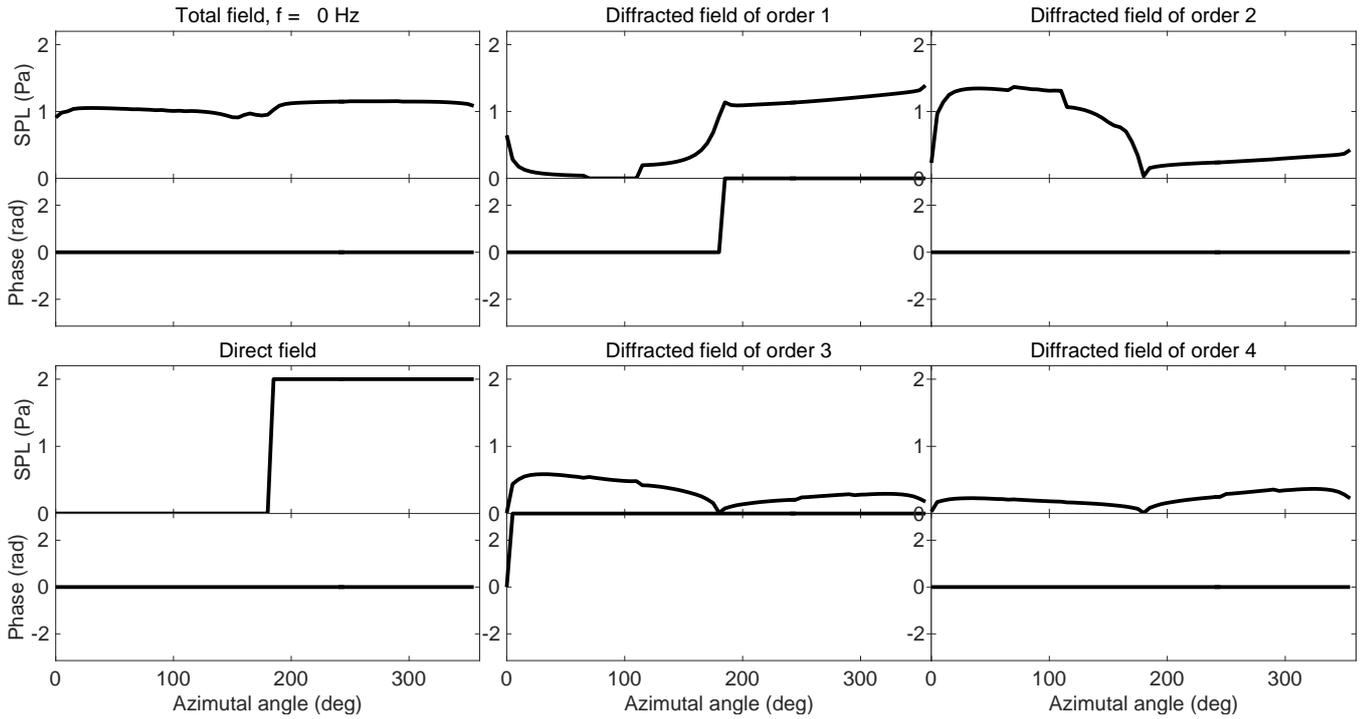
5.1.1 Ordre minimum

Comme annoncé dans la Sect. 4.2.3, l'examen des différents ordres du champ diffracté à 0 Hz permet de déterminer l'ordre maximum nécessaire pour atteindre une précision voulue. Cet ordre est relatif à la géométrie de l'enceinte, c'est-à-dire au ratio des 3 longueurs de l'enceinte rectangulaire. Pour le visualiser, on trace la directivité prédite par le modèle, puis sa décomposition. On peut ainsi juger de la contribution d'un ordre au résultat final.

On considère le cas du HP3 de l'enceinte A (voir Annexe A). On utilise la méthode de visualisation décrite sur l'Annexe B, on s'attend donc à un champ total monopolaire. Les récepteurs sont situés à 1.1 m dans le plan horizontal. Il y a 72 récepteurs répartis sur le cercle. La discrétisation est telle qu'on a un point tous les 1 cm (c'est la discrétisation à 1 kHz du modèle ESIE de la Table III.5.1). Les résultats sont visibles sur la Figure III.5.1, et sont représentés sous deux formes différentes. La partie supérieure de la figure représente l'intensité et la phase du champ total ainsi que des ordres du champ diffracté lorsque l'on parcourt les récepteurs selon la flèche de la Figure III.4.2. On représente ces champs jusqu'à l'ordre 4. Ces champs sont normalisés par l'amplitude $\hat{S}/4\pi$ du monopole, on s'attend donc à une valeur constante de 1 pour le champ total. La partie inférieure est une représentation différente des mêmes données, tracée sur un diagramme polaire. Dans cette dernière, la phase et l'ordre 4 ne sont pas représentés.

On peut faire deux constatations importantes sur cette figure :

- En premier lieu, le champ total n'est pas complètement monopolaire. Sa valeur varie de $\pm 10\%$ autour de 1. Cette erreur représente donc la plus grosse erreur que l'on obtiendra en utilisant l'ordre 4. Cette erreur diminue avec la fréquence. Cette erreur tombe à $\pm 2\%$ à l'ordre 6 (non représenté ici). À titre d'exemple, pour la géométrie du cube, l'ordre 4 donne une précision minimum de $\pm 2\%$ (non représenté ici).
- Comme on est à la fréquence nulle, les sources secondaires ne varient pas en phase sur l'arête, tout comme les différentes composantes du champ. On est face à une



HP #3, Frequency 0 Hz

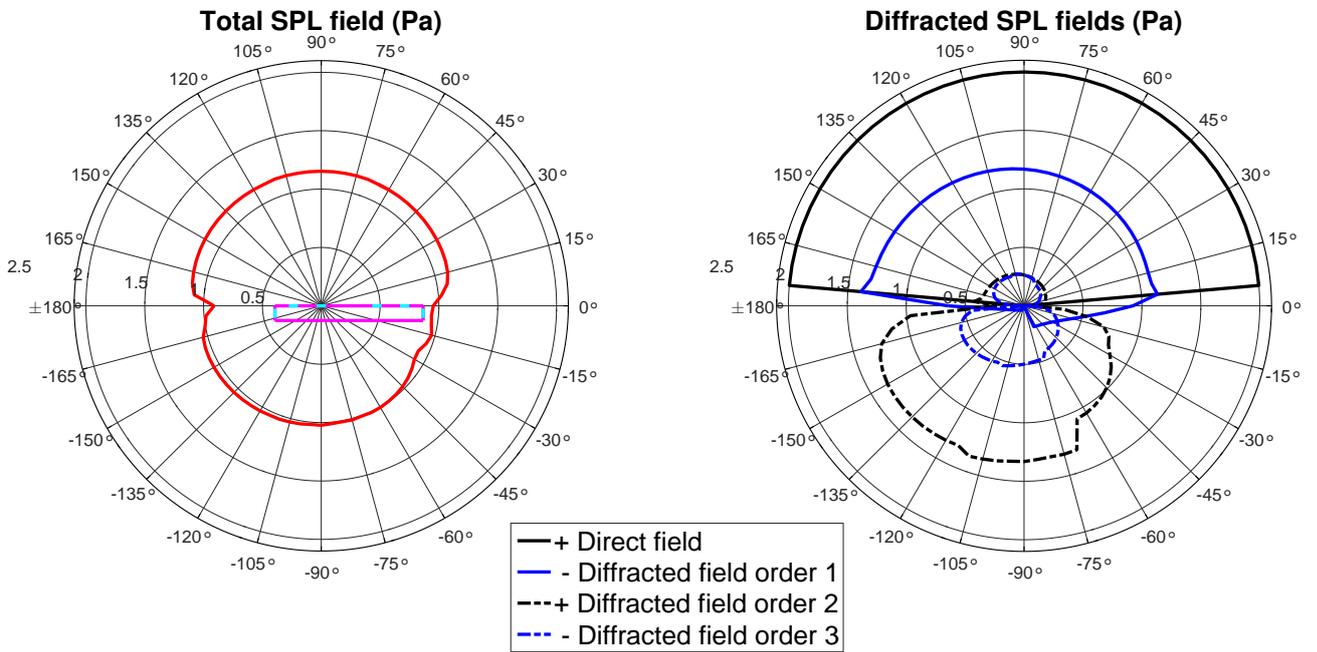


Figure III.5.1 – Décomposition de la directivité horizontale (en Pa normalisée par la valeur maximum) du HP3 de l’enceinte A à 0 Hz. Les récepteurs sont situés à 1.1 m dans le plan horizontal. Haut : Version non polaire. Bas : Version polaire

alternance entre une valeur positive (phase nulle) et une valeur négative (phase de π). On peut retrouver dans la partie supérieure de la Figure III.5.1 le comportement que l'on décrit dans la Sect. 2.4.4. Ainsi, le champ direct prend le double de la valeur du monopole. En conséquence, le champ diffracté d'ordre 1 vient compenser cette valeur en face du monopole avec un signe négatif, mais conserve un signe positif derrière l'enceinte. Les champs diffractés d'ordre supérieur présentent une alternance de signe, dont la somme converge vers le champ monopolaire. Cette alternance de signe est représentée par l'alternance des couleurs bleue et noire dans la représentation en diagramme, même si elle n'est pas complètement vraie pour l'ordre 1.

Dans la suite, on adoptera la représentation en diagramme, qui a l'avantage d'être plus lisible. On perd ainsi l'information de la phase, mais celle-ci est difficilement interprétable en haute-fréquence. On gardera à l'esprit que les différents ordres du champ diffracté ont une logique de signes alternés, à l'exception du champ diffracté d'ordre 1 pour lequel la fonction de directivité β implique un changement de signe aux frontières du champ géométrique.

5.1.2 Nombre de points minimums pour l'intégration

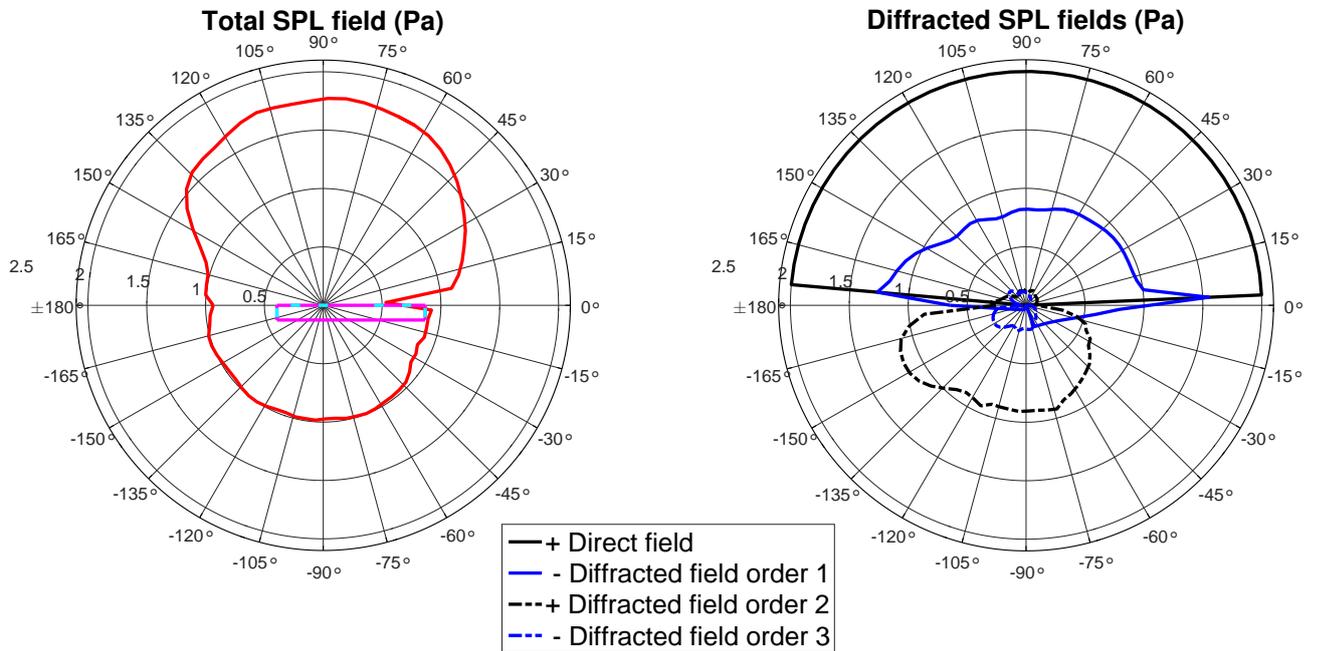
On examine maintenant l'influence du nombre de points permettant de discrétiser les arêtes. Pour cela on se place dans le même cas que dans la section précédente, mais à une fréquence de 1100 Hz. On considère deux cas pour la discrétisation, le premier de 60 points par longueur d'onde, et le second de 30 points par longueur d'onde. Cela correspond respectivement à un point tous les 0.5 cm et 1 cm. Comme annoncé dans la section précédente, on adopte la représentation en diagramme qui a l'avantage d'être plus lisible, en marquant la logique de champ alterné par l'alternance des couleurs noire et bleue. Les résultats sont visibles sur la Figure III.5.2.

Discussion

La figure supérieure pour laquelle on a 60 éléments par longueur d'onde fait office de référence. On obtient exactement la même figure lorsqu'on utilise 120 éléments par longueur d'onde. Cette figure montre que la prédiction n'est pas parfaite : la directivité présente deux points singuliers sur les zones latérales. Ces points sont proches de deux plans problématiques (voir Figure III.3.2). On constate que cette singularité provient principalement de l'ordre 1, et pourrait donc être évitée avec la méthode décrite dans la Sect. 2.3.3, conformément à [139], mais que l'on a pas implémentée.

On constate que 30 éléments par longueur d'onde ne sont pas suffisants pour obtenir une convergence à 1100 Hz. Notons que ce maillage était suffisant à une fréquence de 1000 Hz (rayonnement non représenté). À 1100 Hz, on constate des oscillations dans la partie arrière du rayonnement. Comme annoncé dans la Sect. 4.2.2, le modèle de diffraction est donc bien loin de la règle des 6 points par longueur d'onde, règle standard du modèle éléments finis. Il est aussi intéressant de constater que ces oscillations proviennent principalement de l'ordre 2. Ceci est justifié par le fait que l'ordre 2 est l'ordre de diffraction le plus petit qui décrit le rayonnement derrière l'enceinte (voir la Sect. 4). Les oscillations apparaissent pour les points situés exactement derrière l'enceinte. Ces points

HP #3, Frequency 1100 Hz



HP #3, Frequency 1100 Hz

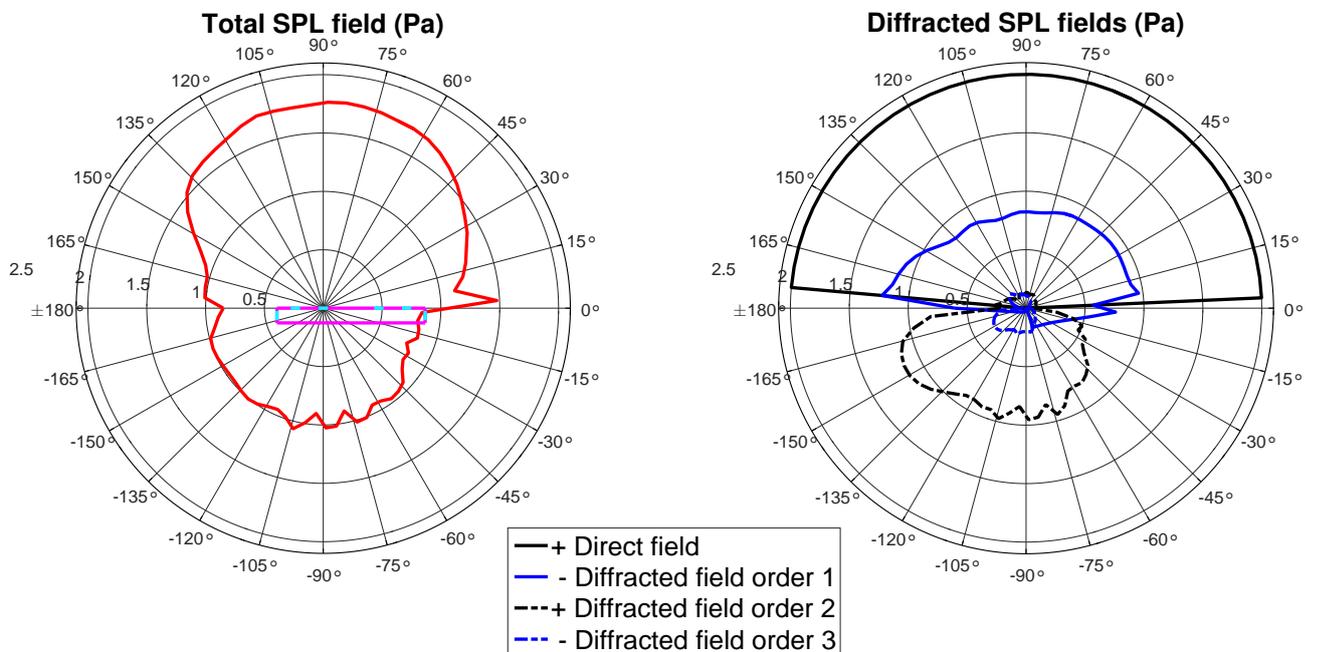


Figure III.5.2 – Décomposition de la directivité horizontale (avec la méthode de visualisation de l'Annexe B) du HP3 de l'enceinte A à 1100 Hz. Les récepteurs sont situés à 1.1 m dans le plan horizontal. Haut : 60 éléments par longueur d'onde. Bas : 30 éléments par longueur d'onde

sont ceux pour lesquels les trajets $m + l$ sont les plus longs, et donc les plus susceptibles d'apporter du repliement spatial (voir Sect. 4.2.2). Ce phénomène apparaît aussi pour les ordres supérieurs, mais il est moins marqué, car leurs amplitudes sont plus faibles.

Il est intéressant de préciser que doubler les points du maillage (soit un point tous les 0.5 cm à la place de 1 cm) permet de tripler la fréquence de validité, dans le cas particulier des exemples de la Figure III.5.2. Le rayonnement à 3 kHz n'est pas représenté, mais on indique son temps de calcul dans la Table III.5.1. La relation entre longueur d'onde et maillage n'est pas linéaire, et mériterait d'être étudiée (voir Sect. 4.2.2).

Dans la suite, la discrétisation des arêtes est suffisamment fine pour que le modèle converge.

5.1.3 Temps de calcul

On souhaite comparer les temps de calcul de chaque modèle. Comme annoncé dans la Sect. 6.6 du chapitre 2, le temps de calcul dépend grandement de l'implémentation, des méthodes et de la machine utilisée. Néanmoins, il reste un bon indicateur de ce que l'on peut attendre en termes de performance pour ce genre de modèle. Pour les tests, la machine utilisée est un ordinateur portable Zbook de HP avec un CORE i7 vPro, et 8Go de mémoire vive. 8Go de mémoire permet d'utiliser la méthode de Svensson sans atteindre le *swap* pour nos exemples. Le calcul est implémenté sous Matlab 2015b, et est comparé avec la toolbox ESIE de Svensson (voir Sect. 4.3.1) et le moteur BEM (décrit dans la Sect. 3 du chapitre 1), dans le même Matlab. Cette machine est la même que celle employée pour créer la Figure II.6.9.

On fait la comparaison pour 2 fréquences (1 kHz) et (3 kHz) pour l'enceinte A. Le maillage du moteur BEM est construit pour que l'on ait 10 éléments par longueur d'onde. Le maillage du moteur ESIE est pris de telle sorte que le calcul converge, avec une marge d'une centaine de hertz. Les temps de calcul de la partie géométrique et de l'ordre 1 de diffraction sont sensiblement bas pour les deux implémentations, et les différences ne seront donc pas détaillées dans les résultats. Pour l'opérateur d'évaluation, notre implémentation est désignée par $\sum \mathcal{I}_{\text{ext}}$ et celle de Svensson par $\mathcal{I}_{\text{prop}}$. Pour l'opérateur d'incrément, notre implémentation est désignée par $\sum \mathcal{I}_+$ et celle de Svensson par \mathcal{I} . Pour l'implémentation de Svensson, l'essentiel du temps de calcul vient de l'assemblage des matrices. Le temps pour les appliquer est négligeable, ce qui permet de ne pas augmenter le temps du calcul pour un ordre supplémentaire. Dans notre cas, chaque ordre supplémentaire nécessite le temps de calcul d'incrément sur la Table III.5.1.

Puisque le calcul de l'ordre 1 et l'opérateur d'évaluation dépendent du nombre N_R de récepteurs, on considère 3 cas : 1 point simple, 72 points répartis sur un cercle et $72 \times 37 = 2664$ points répartis sur une sphère. Les résultats sont donnés sur la Table III.5.1, sur laquelle on indique également les grilles de discrétisation utilisées.

Table III.5.1 – Exemple des temps de calcul obtenus pour les deux implémentations de la méthode ESIE et le moteur BEM, dans le cas de deux fréquences. Notre implémentation et celle de Svensson ont globalement le même temps de calcul pour l'ordre 0 et l'ordre 1. Pour l'opérateur d'évaluation, notre implémentation est désignée par $\sum \mathcal{I}_{\text{ext}}$ et celle de Svensson par $\mathcal{I}_{\text{prop}}$. Pour l'opérateur d'incrémentation, notre implémentation est désignée par $\sum \mathcal{I}_+$ et celle de Svensson par \mathcal{I} . Pour l'implémentation de Svensson, l'essentiel du temps de calcul vient de l'assemblage des matrices. Le temps pour les appliquer est négligeable, ce qui permet de ne pas augmenter le coût de calcul pour un ordre supplémentaire. Dans notre cas, chaque ordre supplémentaire nécessite le temps de calcul de l'opérateur. On indique cette particularité par la notation (1 fois) et (n fois).

N_R	Opérateurs	ESIE (1 kHz)	BEM (1 kHz)	ESIE (3 kHz)	BEM (3kHz)
		80 x 8 x 7	26 x 5 x 5	160 x 16 x 15	140x14x13
\forall	$\sum \mathcal{I}_+$ (1 fois)	< 1 s		150 s	
N_R	\mathcal{I} (n fois)	3 s		30 s	
1	Order 0 + 1	< 1 s	5 s	< 1 s	60 s
	$\sum \mathcal{I}_{\text{ext}}$ (1 fois)	<1 s		1 s	
	$\mathcal{I}_{\text{prop}}$ (n fois)	< 1 s		1 s	
72	Order 0 + 1	< 1 s	5 s	1 s	60 s
	$\sum \mathcal{I}_{\text{ext}}$ (1 fois)	10 s		40 s	
	$\mathcal{I}_{\text{prop}}$ (n fois)	1 s		2 s	
2664	Order 0 + 1	1 s	10 s	2 s	80 s
	$\sum \mathcal{I}_{\text{ext}}$ (1 fois)	370 s		1400 s	
	$\mathcal{I}_{\text{prop}}$ (n fois)	20 s		60 s	

Discussion

On peut faire plusieurs constatations :

Différence des implémentations du modèle ESIE. En premier lieu, on constate que l'implémentation ESIE de Svensson est beaucoup plus efficace que notre implémentation en termes de temps de calcul, en particulier pour le calcul des ordres supérieurs à 2, qui nécessite le calcul des opérateurs d'incrémentations $\sum \mathcal{I}_+$ et \mathcal{I} . Si on se limite à l'ordre 2 ($\sum \mathcal{I}_{\text{ext}}$ et $\mathcal{I}_{\text{prop}}$), les implémentations donnent des résultats similaires pour $N_R = 1$, puis la différence augmente très rapidement avec ce nombre. Ce résultat était attendu (voir Sect. 4.3.1). Dans la suite, on parle de l'implémentation de Svensson quand on se réfère au modèle ESIE.

Influence du nombre de récepteurs. Le modèle ESIE est toujours plus intéressant quand il y a peu de récepteurs. Remarquons que, d'après le principe de réciprocité, le temps de calcul de l'ordre 1 et 2 va être multiplié par le nombre de points d'intégration dans le cas d'une source étendue (voir Sect. 4.3.2). Pour une source simple, dans le cas le plus avantageux pour la méthode ESIE (Implémentation de Svensson, $N_R = 1$ et 3 kHz), l'avantage de la méthode ESIE par rapport à la BEM est d'un facteur 50 lorsque l'on considère uniquement l'ordre 2, et d'un facteur 2 en considérant tous les ordres. Dans la pratique, l'ordre 2 permet d'avoir une précision correcte à 3 kHz (voir Sect. 5.2). Dans le cas le moins avantageux ($N_R = 2664$ et 1 kHz), le modèle BEM est avantageux d'un facteur 2, et d'un facteur 40 si on considère notre implémentation. En termes de temps de calcul, le choix d'une méthode ou d'une autre doit donc se faire en fonction du nombre de récepteurs.

Influence de la fréquence. D'une manière générale, plus la fréquence augmente, plus les deux modèles voient leur coût de calcul augmenter. La complexité augmente en N^3 avec le modèle BEM et en N^4 avec le modèle ESIE, pour le calcul de tous les ordres ([139]). Cependant, plus la fréquence augmente, moins on a besoin d'ordres pour décrire correctement le rayonnement. Cet effet permet de compenser ce temps de calcul en N^4 à 3000 kHz car on peut alors rester à l'ordre 2 ou moins pour une précision correcte (voir Sect. 5.2). La méthode ESIE redevient plus intéressante que le BEM (60 s VS 80 s) et le sera encore plus lorsqu'on aura besoin uniquement de l'ordre 1. On retrouvera alors un avantage similaire au modèle simplifié de la diffraction comme dans les modèles DED mais avec une meilleure prédiction en dehors de l'axe du haut-parleur.

5.2 Comparaison ESIE et BEM

Dans cette section, on compare succinctement les résultats des prédictions du modèle ESIE avec ceux du modèle BEM en regardant la directivité horizontale de l'enceinte A. Les deux méthodes convergent toutes les deux vers la solution, les résultats sont identiques ([8]). Cependant, on a montré dans la section précédente que la méthode ESIE devenait particulièrement intéressante lorsqu'on la limitait en ordre. On compare donc ici la méthode ESIE au BEM lorsqu'on se limite à l'ordre 2 ou l'ordre 3.

On considère le cas du HP3 de l'enceinte A (voir Annexe A). Les récepteurs sont situés à 1.1 m dans le plan horizontal. Il y a 72 récepteurs répartis sur le cercle. On utilise la méthode de visualisation décrite sur l'Annexe B en normalisant la directivité à chaque fréquence. La discrétisation du modèle ESIE correspond à celle de 3 kHz sur la Table III.5.1, i.e un point tous les 0.5 cm. Les résultats sont visibles sur la Figure III.5.3, et sont représentés en décibels.

Discussion

On constate que la méthode ESIE, limitée à l'ordre 2, décrit correctement le rayonnement en haute-fréquence (2510 Hz). Pour le comportement en basse-fréquence (258 Hz), la méthode ESIE limitée à l'ordre 3 ne suffit pas pour décrire le comportement de l'enceinte. L'erreur de prédiction est d'environ ± 2 dB lorsque les directivités sont normalisées. Il est intéressant de remarquer que l'alternance des signes entre les ordres est bien visible sur la Figure III.5.3. Ainsi, par rapport au comportement quasi-monopolaire attendu à cette fréquence, l'ordre 2 surestime la partie arrière par rapport à la partie avant, et l'ordre 3 fait l'inverse. Cet effet est en partie masqué sur la figure par la normalisation des directivités. Les surestimations et sous-estimations n'apparaissent pas comme supérieures ou inférieures à la référence BEM comme elles le devraient. En effet, la référence a bien le comportement quasi-monopolaire.

Pour la fréquence 1108 Hz, on constate que l'ordre 2 et l'ordre 3 donnent des résultats assez similaires en termes de précision, même si l'ordre 3 montre moins de discontinuités. En effet, en s'aidant de la décomposition de la Figure III.5.2, on montre que la contribution de l'ordre 3 est faible. Remarquons qu'à cette fréquence, la "soustraction d'énergie" apportée par l'ordre 3 en zone arrière apparaît comme une addition. Plus précisément, sur la Figure III.5.2, on constate que l'ordre 2 est supérieur à 1 dans la direction -160° . L'ordre 3 agit donc négativement. Mais c'est l'inverse dans la direction -50° . Cela provient du terme exponentiel de l'Eq. (III.2.27). Une "soustraction d'énergie" peut donc se traduire par un effet d'interférence aussi bien positif que négatif, d'où la difficulté d'interpréter la phase du champ diffracté. Ce phénomène d'interférence explique notamment pourquoi le *baffle step response* peut être supérieur à 6 dB (voir Sect. 5.3).

5.3 Analyse des directivités 3D à l'aide du modèle ESIE

Dans cette dernière section, on se sert du modèle ESIE pour analyser le rayonnement 3D d'une enceinte cubique. On s'intéresse en particulier à la forme du rayonnement lorsque la pression dans l'axe est supérieure à 6 dB.

5.3.1 Enceinte A

On analyse le motif de rayonnement 3D de l'enceinte A autour de 3000 Hz. À cette fréquence apparaît un double lobe visible sur les Figures I.4.2 et I.4.5. Ce lobe est présent jusqu'à une fréquence d'environ 4000 Hz. Pour l'analyse, on utilise le même type de représentation que dans Figure III.5.2 mais en décibels. Il faut faire attention avec l'utilisation des décibels car l'addition en intensité du champ diffracté ne correspond pas au champ total. En effet, on a :

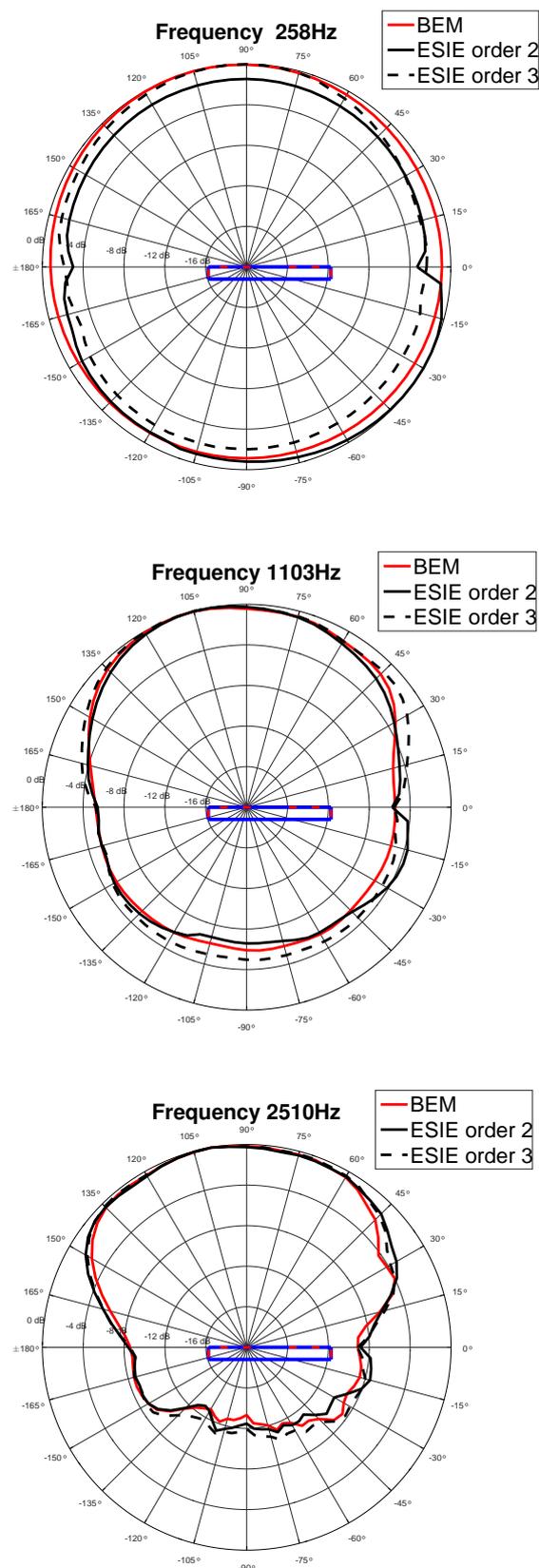


Figure III.5.3 – Directivités horizontales prédites par le modèle ESIE (ordre 2 et 3) et le BEM pour les fréquences 258 Hz, 1103 Hz et 2510 Hz. L'intensité est donnée en décibels et normalisée pour chaque fréquence, en utilisant la méthode de l'Annexe B.

Amp Balloon Plots, Frequency 3235 Hz

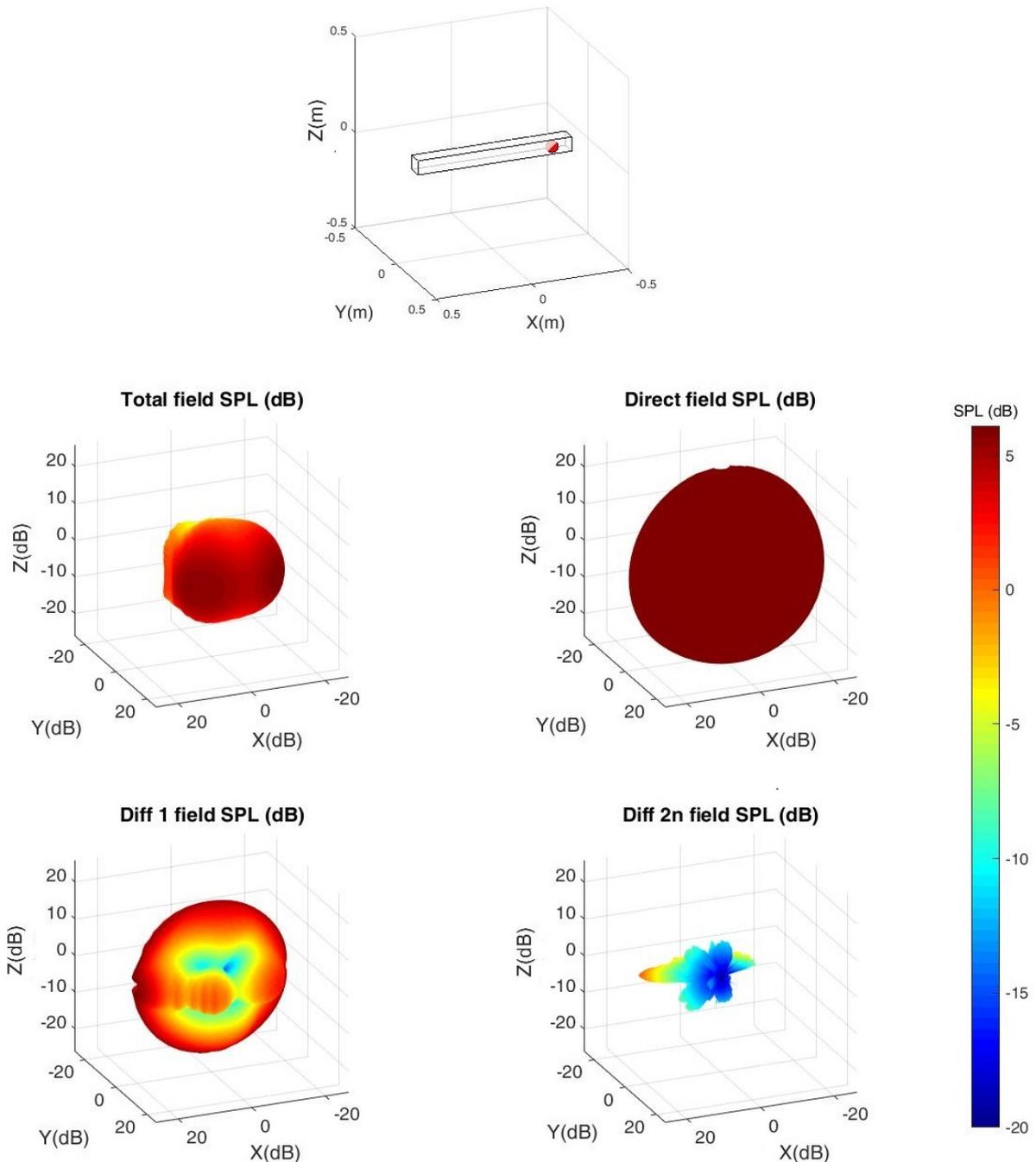


Figure III.5.4 – Analyse du champ de pression émis par l'enceinte A pour une source ponctuelle à une fréquence de 3235 Hz, à l'aide de la décomposition du modèle de diffraction. Les champs sont normalisés par la valeur maximale du champ total et représentés à l'aide de *balloon plots*. La couleur de la surface représente l'intensité. Le champ de pression total (milieu gauche) est la somme du champ direct (milieu droite), du champ diffracté d'ordre 1 (bas gauche) et de la somme du champ diffracté d'ordre 2 à 10 (bas droite).

Phase Balloon Plots, Frequency 3235 Hz

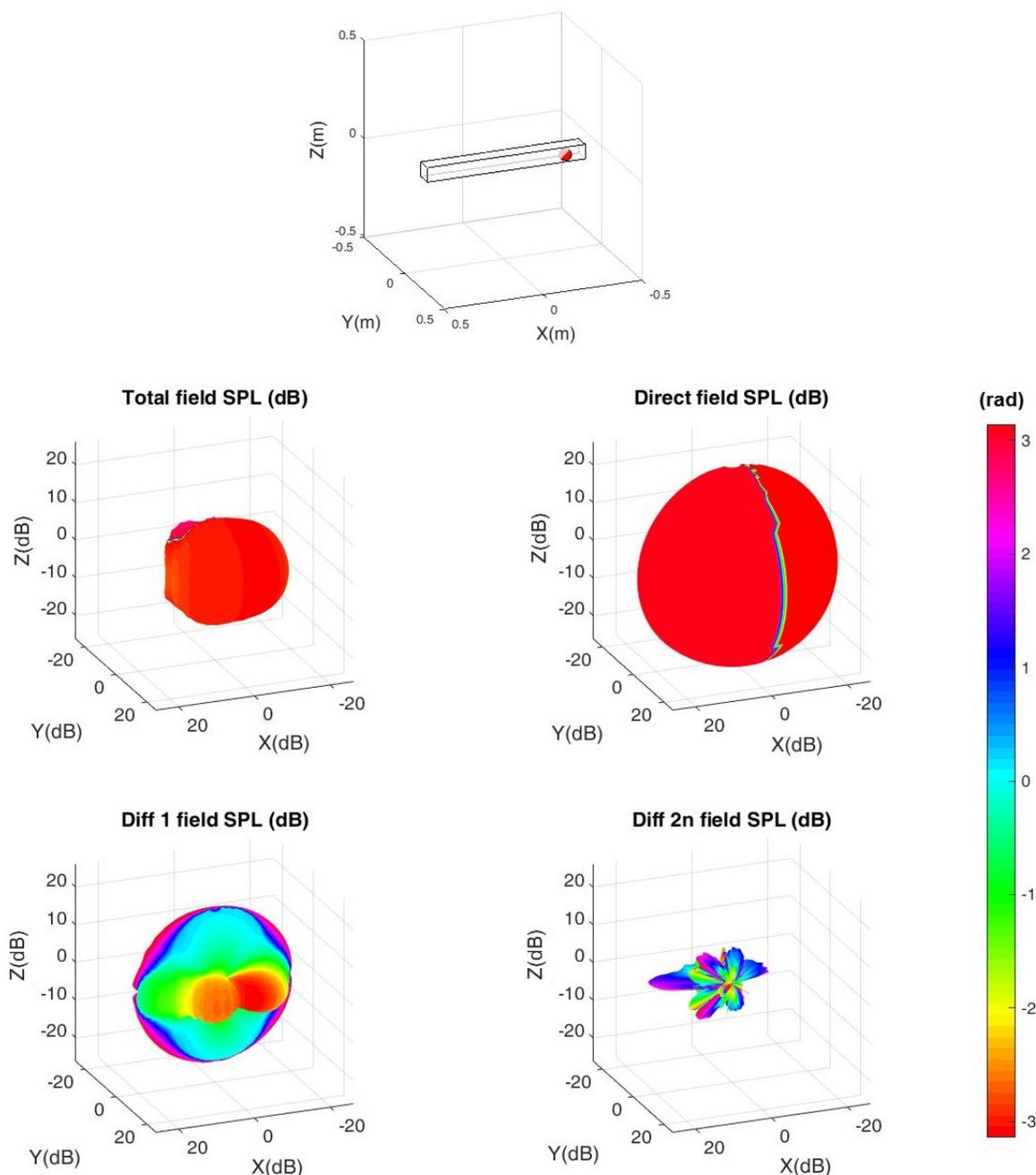


Figure III.5.5 – Analyse du champ de pression émis par l'enceinte A pour une source ponctuelle à une fréquence de 3235 Hz, à l'aide de la décomposition du modèle de diffraction. Les champs sont normalisés par la valeur maximale du champ total, et représentés à l'aide de *balloon plots*. La couleur de la surface représente la phase (bas). Le champ de pression total (milieu gauche) est la somme du champ direct (milieu droite), du champ diffracté d'ordre 1 (bas gauche) et de la somme du champ diffracté d'ordre 2 à 10 (bas droite).

$$20 \log_{10}(p_{\text{total}}) = 20 \log_{10} \left(p_{\text{direct}} + \sum_n p_{\text{diff}}^{(n)} \right) \neq 20 \log_{10}(p_{\text{direct}}) + \sum_n 20 \log_{10} \left(p_{\text{diff}}^{(n)} \right)$$

L'interprétation des Figures III.5.4 et III.5.5, ainsi que des Figures III.5.7 et III.5.8 est donc phénoménologique.

Conformément à la Figure I.4.5, on considère le cas du HP2 de l'enceinte A. Il y a 2664 récepteurs, situés à 2.2 m du centre de l'enceinte, répartis sur la sphère. On représente le champ total, le champ direct, le champ diffracté d'ordre 1 et la somme du champ diffracté d'ordre 2 à 10 sous forme de *Balloon plot*. Les résultats sont visibles sur les Figures III.5.4 et III.5.5. Pour la partie supérieure de la figure, la couleur représente l'intensité en décibel des différents champs. Pour la partie inférieure, la couleur représente la phase, mais on conserve l'information d'amplitude par le biais du *Balloon plot*.

Discussion

La méthode ESIE avec une source ponctuelle à la place du haut-parleur est bien capable de décrire le phénomène du double lobe que l'on observe sur les mesures, comme le montre l'examen champ total. L'analyse en champ diffracté montre que la contribution du champ d'ordre 2 en face de l'enceinte est faible. On peut donc se contenter d'expliquer l'apparition de ces lobes avec le champ diffracté d'ordre 1.

On remarque que ce lobe est présent sur le champ diffracté d'ordre 1, et qu'il a tendance à être en phase avec le champ direct. En effet, la phase du lobe sur la partie inférieure de la figure montre que le double lobe a une phase autour $-\pi$ (± 0.5), qui est la valeur de la phase du champ direct. Le reste de la partie avant du champ diffracté d'ordre 1 possède bien une phase autour de 0, et une phase autour de $-\pi$ pour la partie arrière à l'enceinte, conformément aux interprétations de la Figure III.5.1 dans la Sect. 5.1.1.

Ce phénomène de double lobe peut donc être vu comme le résultat d'un phénomène d'interférence entre le champ direct et le champ diffracté d'ordre 1. Notons que cela ne provient pas de la forme d'une caractéristique de la source (i.e la forme du haut-parleur) car le modèle ESIE est calculé avec un point source. C'est ce phénomène qui est à l'origine du gain de 9 dB pour la pression dans l'axe d'un haut-parleur situé sur une enceinte rectangulaire (Figure II.6.8). Ce phénomène est intrinsèque à la forme du baffle rectangulaire, puisqu'il est décrit par le champ diffracté d'ordre 1 uniquement.

Sur les mesures, visibles sur la Figure I.4.5, le phénomène est d'autant plus surprenant que le lobe décalé vers la gauche est plus important que le lobe décalé vers la droite, alors que le haut-parleur est lui-même décalé vers la droite. En effet, le lobe est plus fort pour le haut-parleur 2 que pour le haut parleur 3 de la barre de son. Ce décalage du lobe dans le sens opposé au décalage du haut-parleur, est environ 3 dB plus fort que le son produit en face du haut-parleur. Il est donc non négligeable. Dans l'optique d'explorer plus en détail ce phénomène contre-intuitif, on a mesuré et simulé la directivité de l'enceinte C de l'Annexe A. Cette enceinte possède en effet un haut-parleur très décalé sur son baffle. Les résultats sont présentés dans la Sect. 5.3.2

Balloon Plot, Frequency 1500 Hz

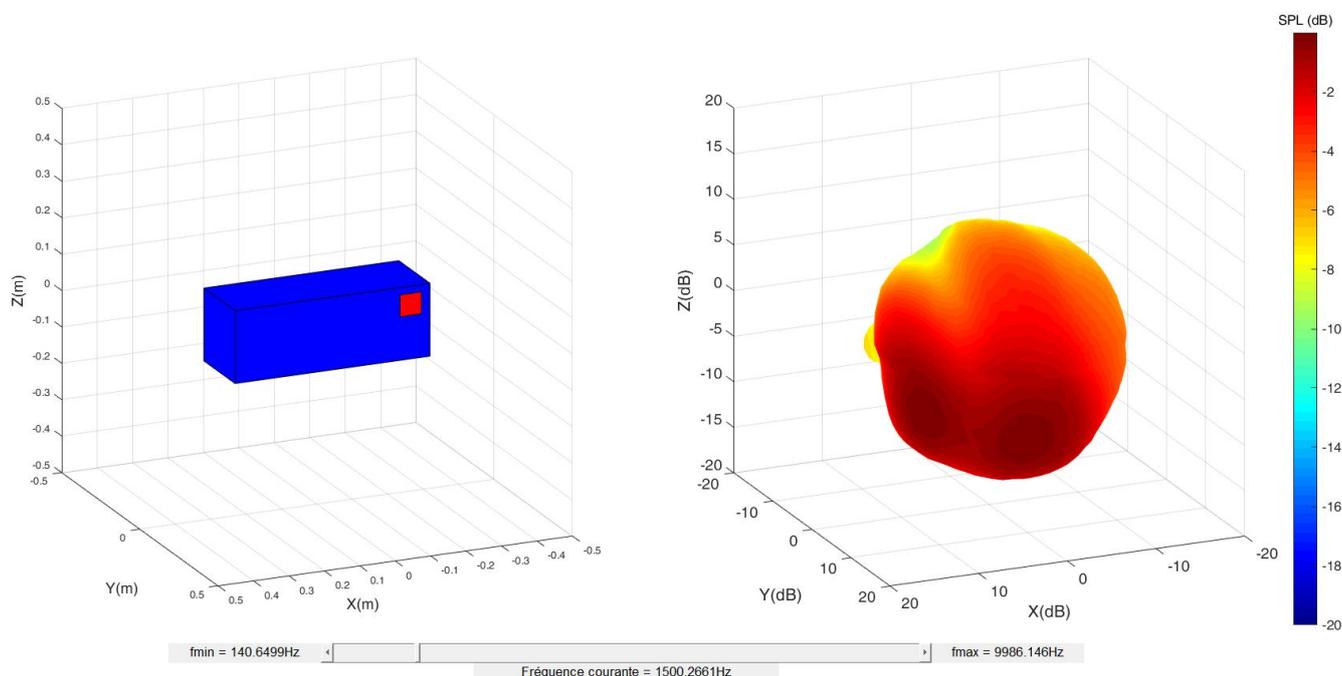


Figure III.5.6 – Mesure de l’enceinte C : Intensité de la pression (normalisée) à la fréquence 1500 Hz, lorsque les récepteurs sont localisés à 2.2m du centre de l’enceinte. On remarque la direction du maximum d’intensité est dans le sens opposé (vers le bas-gauche) au décalage du haut-parleur sur le baffle (en haut à droite).

5.3.2 Enceinte C

On souhaite maintenant faire la même étude que celle de la Sect. 5.3.1 mais avec l’enceinte C de l’Annexe A. Notre hypothèse est qu’un haut-parleur fortement excentré mènera à un fort décalage du lobe principal, dans la direction opposée à ce décalage. On a réalisé une mesure tridimensionnelle de l’enceinte C, selon la méthode décrite dans la Sect. 2 du chapitre 1. Il y a 2664 positions de récepteurs à une distance de 2.2m du centre de l’enceinte. On présente la directivité obtenue à la fréquence 1500 Hz à la Figure III.5.6. Cette fois, on n’a pas utilisé la méthode de compensation décrite dans l’Annexe B, pour mettre en évidence que le phénomène est fort et apparaît bien dans la pratique. Sur les Figures III.5.7 et III.5.8 on présente l’analyse de cette directivité 3D par la méthode ESIE. On obtient cette figure avec la même méthode que celle utilisée pour les Figures III.5.4 et III.5.5 décrites sur la Sect. 5.3.1 (méthode de visualisation incluse cette fois-ci pour faciliter l’interprétation).

Discussion

Sur ces figures, on vérifie notre hypothèse en constatant que le lobe principal à 1000 Hz se décale dans la direction opposée au décalage du haut-parleur sur le baffle. Cet effet

Amp Balloon Plots, Frequency 1500 Hz

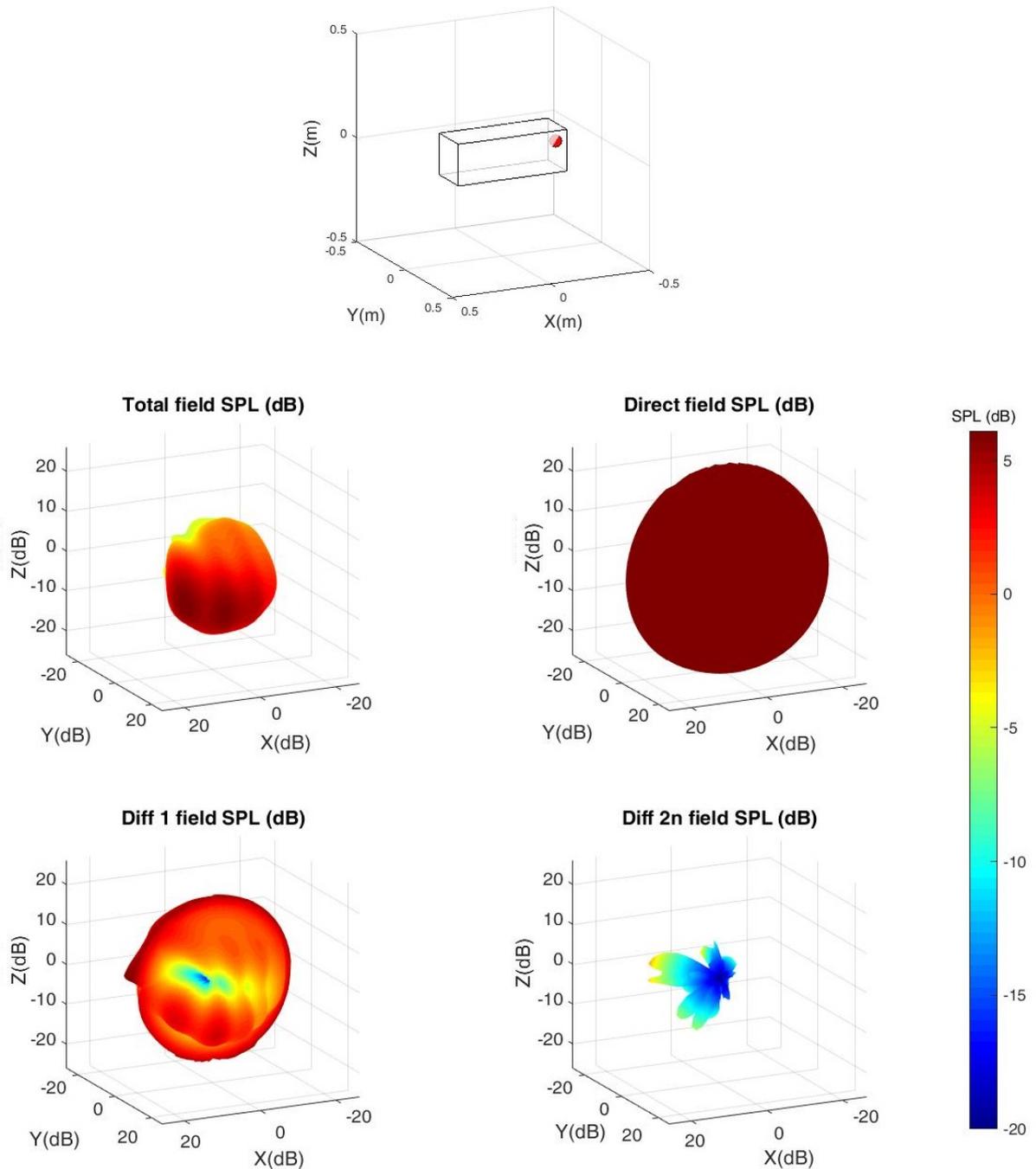


Figure III.5.7 – Analyse du champ de pression émis par l’enceinte C pour une source ponctuelle à une fréquence de 1500 Hz, à l’aide de la décomposition du modèle de diffraction. Les champs sont normalisés par la valeur maximale du champ total et représentés à l’aide de *balloon plots*. La couleur de la surface représente l’intensité. Le champ de pression total (milieu gauche) est la somme du champ direct (milieu droite), du champ diffracté d’ordre 1 (bas gauche) et de la somme du champ diffracté d’ordre 2 à 10 (bas droite).

Phase Balloon Plots, Frequency 1500 Hz

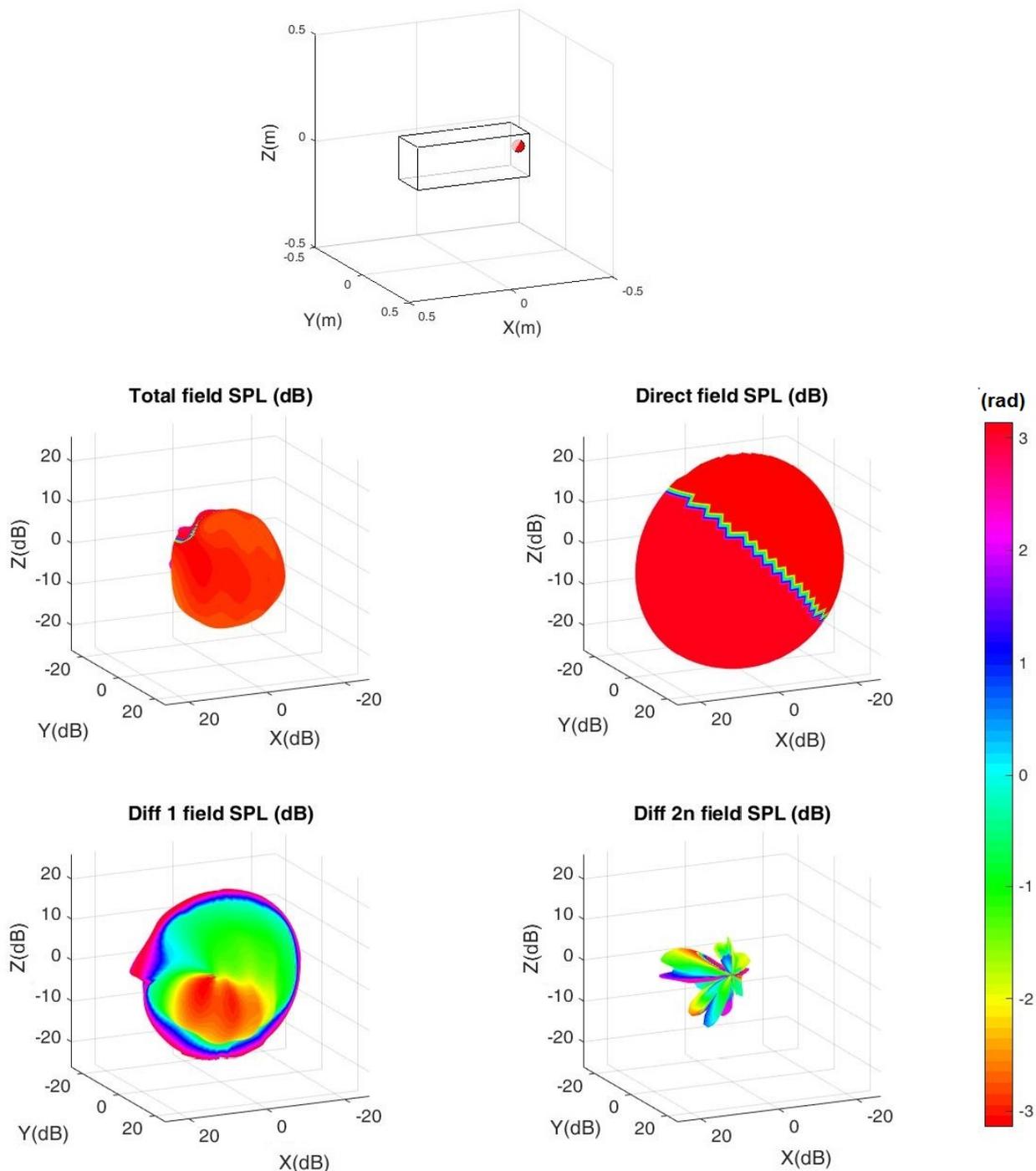


Figure III.5.8 – Analyse du champ de pression émis par l’enceinte C pour une source ponctuelle à une fréquence de 1500 Hz, à l’aide de la décomposition du modèle de diffraction. Les champs sont normalisés par la valeur maximale du champ total et représentés à l’aide de *balloon plots*. La couleur de la surface représente la phase (bas). Le champ de pression total (milieu gauche) est la somme du champ direct (milieu droite), du champ diffracté d’ordre 1 (bas gauche) et de la somme du champ diffracté d’ordre 2 à 10 (bas droite).

est très marqué sur l'enceinte C avec une différence entre la pression maximum et la pression dans l'axe pouvant aller jusqu'à 4 dB. On constate que la position du lobe principal reste en bas à gauche jusqu'à une fréquence d'environ 3000 Hz, avant de se repositionner en face du haut-parleur (non représenté ici). Par rapport à l'enceinte A, la fréquence d'apparition est plus faible, car les dimensions du baffle sont plus grandes. On vérifie, grâce aux Figures III.5.7 et III.5.8, que l'on est bien en présence d'un phénomène d'interférence constructive entre champ direct et champ diffracté d'ordre 1.

L'interprétation physique de ce phénomène purement ondulatoire est difficile sans la vision mathématique des sources secondaires sur les arêtes du baffle. En particulier, une explication de type "confinement du son par le baffle" n'est pas recevable, car elle n'engendrerait pas un gain de 9 dB. En effet, l'hypothèse d'un rayonnement confiné dans la direction du baffle, et qui n'existe pas dans sa direction opposée car le son aurait tendance à fuir derrière l'enceinte plus facilement (puisque le haut-parleur est plus proche du bord), induirait bien un lobe dans la direction opposée au décalage, mais avec un gain de 6 dB seulement, comme c'est le cas pour le sphéroïde ou bien le monopole dans un plan infini.

L'effet est donc bien ondulatoire, et difficilement explicable "avec les mains". On a besoin d'un modèle de diffraction par un baffle pour l'expliquer de manière satisfaisante. Notons que cet effet peut être un problème lors de la conception de l'enceinte. En effet, dans le cas de l'enceinte C, l'enceinte a été conçue pour être positionnée verticalement. Nos travaux montrent que dans ce cas-là, elle émet principalement vers le sol, dans la plage de fréquences [1 kHz, 3 kHz]. Or, cette plage de fréquences est cruciale pour la localisation d'une source sonore par l'être humain. Cette remarque est aussi valable pour les barres de son en position verticale, qui ont d'autant plus tendance à émettre vers le bas que le haut-parleur est décalé vers le haut. Les barres de son en position horizontale (par exemple celles situées en dessous d'un écran) voient leurs haut-parleurs situés à gauche émettre du côté droit dans une certaine plage de fréquences, et en face pour une autre plage.

Cet effet provenant du baffle, est moins présent dans le cas d'une enceinte sphéroïdale. Il semble, indiquer qu'un design aux bords arrondis permet un meilleur contrôle du rayonnement de l'enceinte. Ce genre de design devrait donc être privilégié par les constructeurs.

6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, on a commencé par redémontrer la formule de diffraction par une arête finie de Svensson, à l'aide de la méthode de Pierce. Cette démonstration se base sur la résolution par l'acoustique géométrique du problème lorsque l'arête possède un angle d'ouverture qui divise exactement 2π . Ensuite, grâce au théorème des résidus, on a écrit la somme des termes sources issus de l'acoustique géométrique sous une forme intégrale, puis on a vérifié que cette formule est bien celle qui était recherchée, qu'importe l'angle d'ouverture. Cette démarche nous a permis de faire une interprétation physique de cette formule, et d'expliquer d'où viennent ses singularités. On a ensuite montré comment une formulation par opérateurs apparaît naturellement lorsqu'on utilise cette formule pour calculer la diffraction par un polyèdre d'un champ sonore issu d'une source ponctuelle. On a donné ces opérateurs. On montre également comment étendre la méthode au cas d'une source étendue (piston) plutôt qu'une source monopolaire. Cependant, on n'a pas retenu cette dernière formulation, car elle augmente le temps de calcul. De plus, les résultats obtenus par le modèle du point source suffisent pour analyser le rayonnement d'une enceinte.

On a également donné des détails sur les schémas d'intégration numériques utilisés et les différences entre notre implémentation et celle de Svensson. Une comparaison succincte en termes de temps de calcul de ces deux implémentations a été effectuée. C'est l'implémentation de Svensson qui est la plus rapide. D'une manière générale, on constate que la méthode est particulièrement efficace lorsque le nombre de récepteurs est faible. Par rapport aux éléments finis, la méthode ESIE est plus efficace à l'ordre 2 pour un nombre quelconque de récepteurs, et à tous les ordres lorsqu'on se limite à une centaine de récepteurs. Du point de vue de la précision des résultats, on constate que la méthode est précise à toutes les fréquences. On constate également que l'on peut limiter fortement l'ordre nécessaire à une précision correcte lorsque la fréquence augmente. Cela rend la méthode encore plus attractive en haute-fréquence. Ce résultat était attendu puisque les modèles de diffraction sont généralement plus efficaces en haute-fréquence. La possibilité d'analyser le rayonnement d'une enceinte, en le séparant en une somme de composantes géométriques et des différents ordres du champ diffracté, est un autre avantage de cette méthode. Cette analyse permet de faire une interprétation fine du rayonnement d'une enceinte rectangulaire. Ainsi, on a montré que le gain de 9 dB, observé sur la réponse dans l'axe du haut-parleur, provient de deux effets différents. Environ 6 dB proviennent de l'effet de bafflage, et 3 dB d'un phénomène ondulatoire : des interférences constructives. On a également montré que ce dernier phénomène est intrinsèque à la forme rectangulaire du baffle, et influe sur la direction du maximum d'intensité émis par une enceinte. En effet, dans ce dernier cas, on a montré que la direction du maximum varie de manière contre-intuitive, suivant la position du haut-parleur sur le baffle. On en retiendra la description empirique suivante : si un haut-parleur est décalé d'un côté du baffle, alors il existe une certaine plage de fréquences caractéristique pour laquelle l'enceinte a tendance à émettre dans la direction opposée à ce décalage, plutôt que de manière omnidirectionnelle (basse-fréquence) ou en face du haut-parleur (haute-fréquence).

On peut envisager plusieurs perspectives pour ce travail. En premier lieu sur l'implémentation en elle-même, pour laquelle il peut être intéressant de pré-calculer uniquement les fonctions de directivité β des opérateurs. De cette manière, on aurait une version équivalente à celle de Svensson pour le calcul d'une fréquence, mais qui devrait devenir encore plus rapide pour chaque nouvelle fréquence voulue, car cela nécessiterait uniquement le calcul d'une fonction de Green pour la grille des trajets possibles sur l'enceinte. On peut aussi envisager une étude de la discrétisation minimum des arêtes à adopter pour une fréquence donnée et un polyèdre en particulier. Enfin, il serait intéressant de développer un critère permettant de prédire quel est l'ordre minimum nécessaire pour obtenir une certaine précision, en fonction de la géométrie du polyèdre et de la fréquence. On peut déjà prédire a posteriori ce critère, à partir de l'étude du rayonnement de l'enceinte à 0 Hz.

Conclusion générale et perspectives

En conclusion, l'étude du rayonnement d'une enceinte rectangulaire nous a amené à étudier différents aspects de l'acoustique.

Nous avons commencé par nous approprier les deux méthodes de référence choisies, numérique et expérimentale, et par les appliquer. Pour la mesure, cela a été l'occasion de proposer une vision plus globale des méthodes d'estimation des non-linéarités d'un haut-parleur à l'aide d'un modèle de Hammerstein en parallèle. Cela nous a naturellement amené à proposer une nouvelle technique d'identification, dans le domaine fréquentiel cette fois. Cette nouvelle technique, bien qu'elle ne soit pas directement utilisable dans le cadre de cette thèse, semble prometteuse pour améliorer l'estimation de tels modèles, et continuera d'être explorée.

Pour essayer d'être plus rapide que ces méthodes de référence, on s'est ensuite tourné vers un modèle analytique : le modèle sphéroïdal. Les mathématiques de ce modèle sont éloignées de celles du modèle numérique de référence, car il est basé sur la résolution de l'équation de Helmholtz par la méthode de séparation des variables, plutôt que la résolution numérique de sa forme intégrale. Il consiste à assimiler la forme rectangulaire de l'enceinte à une forme sphéroïdale proche. Le développement de ce modèle nous a permis d'apporter différentes contributions à l'état de l'art, qui ont pris différentes formes. La première est un calcul difficile permettant d'exprimer le rayonnement d'une portion circulaire sur un sphéroïde. La seconde, plus fondamentale, est l'établissement d'un critère sur le nombre d'harmoniques nécessaires à une bonne représentation du champ lointain, en fonction des dimensions du sphéroïde et de la fréquence. Les troisième et quatrième sont plus applicatives. Elles consistent à proposer une méthode permettant de choisir les dimensions du sphéroïde en fonction des dimensions de l'enceinte, et d'étudier les résultats obtenus. Pour cette dernière étude, on a montré que cette approche est efficace en basse-fréquence, mais n'est pas suffisante en haute-fréquence, avec notamment un déficit de 3 dB sur le lobe principal. La faiblesse des deux méthodes de référence à interpréter physiquement le rayonnement, et donc à expliquer cette différence, nous a poussé à appliquer une autre méthode pour interpréter le rayonnement d'une enceinte rectangulaire : la méthode ESIE.

Les mathématiques de ce dernier modèle sont elles aussi éloignées des deux autres, car ce modèle est construit par récurrence, à partir de l'expression du champ diffracté par une arête finie. Parce qu'on souhaite s'en servir pour expliquer la différence entre le rayonnement d'une enceinte sphéroïdale et celui d'une enceinte rectangulaire, on a commencé par redémontrer cette formule. On s'est particulièrement attardé sur l'interprétation physique que l'on pouvait en faire. On a ensuite pu appliquer et implémenter la méthode au cas de l'enceinte rectangulaire. On a ensuite comparé notre implémentation à celle de Svensson, rendue disponible récemment, ainsi qu'à notre modèle numérique de référence. Ces dernières étapes sont nos contributions à l'état de l'art. Ainsi, on a montré à nouveau que le champ diffracté pouvait être interprété comme un ensemble de sources secondaires, localisées sur les arêtes, mais dont la directivité change en fonction de leurs illuminations. Un modèle avec des sources simples sur les arêtes, comme on en trouve dans la littérature, n'est donc pas acceptable pour décrire le rayonnement dans toutes les directions de l'espace. En revanche, on retrouve bien les effets d'interférences constructives et destruc-

tives, propres à ces modèles. C'est d'ailleurs cet effet qui est responsable de la divergence entre le modèle rectangulaire et le modèle sphéroïdal. Ce phénomène amène un gain qui n'est pas explicable autrement que par un phénomène ondulatoire. En particulier, le phénomène de bafflage, qui est bien présent dans le modèle sphéroïdal, est responsable d'un gain de 6 dB seulement entre les basses et les hautes fréquences, alors que les interférences constructives dues au baffle rectangulaire peuvent faire monter ce gain à 10 dB pour certaines fréquences. Ce phénomène est aussi responsable d'un phénomène contre-intuitif : le décalage de la direction principale d'émission d'une enceinte rectangulaire. Ce phénomène apparaît lorsque le haut-parleur n'est pas centré sur le baffle. Le décalage est opposé au décalage du haut-parleur sur le baffle, c'est-à-dire que si le haut-parleur est décalé vers la droite du baffle, l'enceinte aura tendance à émettre d'avantage vers la gauche qu'en face, pour une certaine plage de fréquences.

Ce travail, parce qu'il porte sur plusieurs modèles très différents, a ouvert la voie à plusieurs perspectives. Pour le modèle sphéroïdal d'abord, il serait intéressant de relier les modes acoustiques à ceux de la barre de son par l'intermédiaire du facteur de rayonnement, comme cela a été fait pour une sphère et une boîte rectangulaire [37]. Cela pourrait permettre une meilleure interprétation de ces modes, reliés aux ondes rampantes au travers d'une transformation de Watson [142, 141]. Également, il pourrait être intéressant de se servir du caractère analytique de la directivité du modèle sphéroïdal pour contrôler le rayonnement de la barre de son, comme cela a déjà été fait dans le cas du cylindre [112, 68, 105] ou de la sphère [107, 99]. Ensuite, pour le modèle de diffraction, la méthode ESIE utilisée est encore jeune et les problèmes numériques inhérents à cette méthode sont encore peu étudiés. Les améliorations possibles sont multiples. Par exemple, il est crucial de pouvoir établir une règle sur le nombre de points nécessaires pour discrétiser les arêtes (voir Sect. 4.2.3 du chapitre 3), ou sur le nombre d'ordres nécessaires (voir Sect. 4.2.3). Cela pourrait permettre d'améliorer sensiblement la rapidité et la fiabilité de la méthode, qui pourrait alors remplacer la méthode des éléments finis pour le calcul des enceintes acoustiques. Il serait aussi intéressant de mieux caractériser le décalage de la direction d'émission d'une enceinte, et voir ses conséquences en pratique dans des conditions d'écoute normales. La différence pouvant aller jusqu'à 3 dB, ce phénomène pourrait être pris en compte dans la conception de la forme d'enceinte "haute qualité", pour laquelle une forme plus ronde serait plus adaptée.

★ A ★

Description des enceintes

Enceinte A

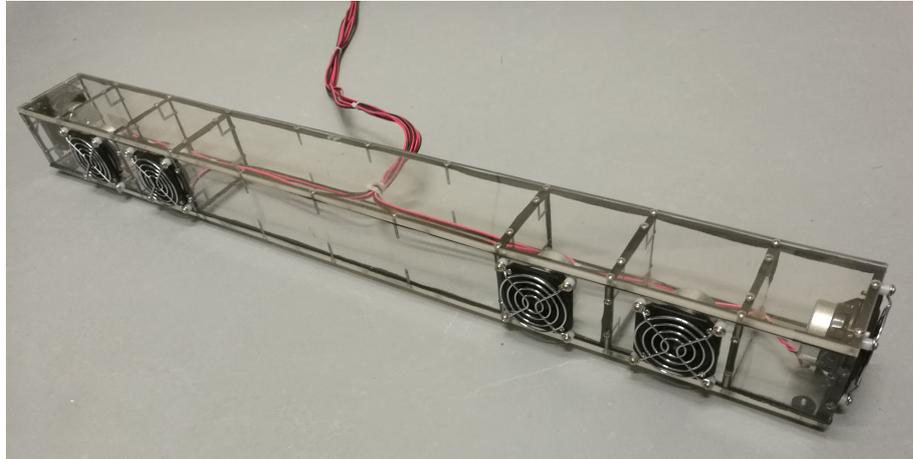


Figure 1 – Enceinte A

Les dimensions et positions sont données selon les conventions : longueur \times largeur \times hauteur

Dimensions de l'enceinte : 0.8 m \times 0.08 m \times 0.074 m

Diamètre des haut-parleurs : 0.045 m

Positions des haut-parleurs par rapport au centre de l'enceinte :

HP1 : 0.4 m \times 0 m \times 0 m

HP2 : 0.3 m \times 0.04 m \times 0 m

HP3 : 0.2 m \times 0.04 m \times 0 m

HP4, HP5 et HP6 : Symétriques dans le sens de la longueur

Séparation interne pour limiter le couplage entre haut-parleur : Oui

Enceinte B



Figure 2 – Enceinte B

Les dimensions et positions sont données selon les conventions : longueur \times largeur \times hauteur

Dimensions de l'enceinte : 0.25 m \times 0.074 m \times 0.074 m

Diamètres des haut-parleurs :

HP2 et HP3 0.045 m

HP1 et HP4 0.038 m

Positions des haut-parleurs par rapport au centre de l'enceinte :

HP1 : 0.125 m \times 0 m \times 0 m

HP2 : 0.041 m \times 0.037 m \times 0 m

HP3 et HP4 : Symétriques dans le sens de la longueur

Séparation interne pour limiter le couplage entre haut-parleur : Non

Enceinte C



Figure 3 – Enceinte C

Les dimensions et positions sont données selon les conventions : longueur \times largeur \times hauteur

Dimensions de l'enceinte : 0.55 m \times 0.2 m \times 0.2 m

Diamètres des haut-parleurs : 0.07 m

Positions des haut-parleurs par rapport au centre de l'enceinte :

HP1 : 0.22 m \times 0.1 m \times 0.05 m

HP2 : Symétrique dans le sens de la hauteur

Séparation interne pour limiter le couplage entre haut-parleur : Non

★ **B** ★

Méthode de Visualisation

Monopole, fonction de Green et piston

Dans ce manuscrit, on fait parfois l'amalgame entre un monopole et une fonction de Green. Si ces deux derniers ont une expression proche, ils sont de natures différentes, et leurs expressions diffèrent légèrement. En effet, le rayonnement d'un monopole de pulsation ω est proportionnel à celle-ci, qui se traduit par une pente de 6 dB/décade. Cela traduit sa meilleure efficacité en haute-fréquence. Ce n'est pas le cas de la fonction de Green. Or, un piston avec qui vibre avec une certaine distribution de vitesse peut-être vu comme une distribution de monopoles sur sa surface. Cependant, dans ce manuscrit, on l'interprète comme une distribution de fonction de Green. Dans la suite, on explicite la différence entre les deux et la transformation implicite que l'on effectue.

Fonction de Green

La fonction de Green G est avant tout un objet mathématique. C'est la solution en un point \vec{r} à l'équation de Helmholtz, lorsqu'une source ponctuelle unitaire est située en \vec{r}_s . La fonction de Green est donc la solution de l'équation :

$$(\Delta + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}_s) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_s) \quad (1)$$

En l'absence de conditions aux limites extérieures, pour le cas uniforme (milieu homogène), on montre qu'elle vaut :

$$G(\vec{r}, \vec{r}_s) = \frac{e^{jk\|\vec{r}-\vec{r}_s\|}}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_s\|} \quad (2)$$

Transposée à l'acoustique, c'est une source de pression ponctuelle d'amplitude constante pour toutes les fréquences. L'amplitude du champ de pression qu'elle génère est la même pour toutes les fréquences.

Monopole acoustique

Un monopole acoustique est une source de débit. C'est un objet physique. On peut le définir de plusieurs façons. Une manière commune est de considérer une sphère pulsante à une vitesse constante V_s dont le rayon a tend vers 0. On considère alors que la vitesse surfacique et mécanique de la sphère et la vitesse acoustique s'égalent en $\|\vec{r}\| = a$ (en considérant le centre du repère au centre de la sphère). La pression rayonnée par une sphère pulsante de rayon a s'écrit :

$$P(\vec{r}) = \rho c V_s \frac{-ika e^{jk\|\vec{r}\| - a}}{1 - ika \|\vec{r}\|/a} \quad (3)$$

avec ρ la densité du milieu et c la vitesse du son. Lorsque a tend vers 0, pour que la puissance de cette source reste finie, V_s doit devenir infinie ; pour palier au problème, on ajoute la condition suivante : la divergence du produit $S = \rho c V_s (ika^2)$ reste constante. Ainsi, on obtient l'expression d'un monopôle acoustique :

$$P(\vec{r}, \vec{r}_s) = S \frac{e^{jk\|\vec{r}-\vec{r}_s\|}}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_s\|} \quad (4)$$

avec

$$S = \rho(-j\omega)4\pi a^2 V_s = \rho(-j\omega)Q_s \quad (5)$$

et Q_s le débit de volume de la sphère pulsante.

Cette expression est équivalente à la fonction de Green, au coefficient S près. L'équivalence entre sphère pulsante et source ponctuelle porte donc sur le débit de volume. Celui-ci permet aussi d'éviter de définir une vitesse infinie sur une sphère infiniment petite.

Le monopole acoustique est donc une source ponctuelle de débit de volume constant. Son amplitude S est la dérivée temporelle seconde de la quantité de masse injectée par la source. En conséquence, son intensité est proportionnelle à la fréquence.

Le monopole correspond à une réalité physique, une source de débit, alors que la fonction de Green est une solution mathématique de l'équation des ondes pour une source unitaire qui n'a pas de réalité physique.

Piston avec une distribution de vitesse

Lorsqu'on définit un piston avec une certaine distribution de vitesse constante pour toutes les fréquences, comme c'est le cas avec le modèle BEM ou le modèle sphéroïdal, cela revient à définir une distribution de monopôle acoustique sur ce piston. En effet, de façon analogue à l'établissement de l'expression du monopôle acoustique à partir d'une sphère pulsante, imposer comme condition limite une distribution de vitesse sur l'enceinte revient à définir une source de débit. La pression rayonnée p par une telle source est donc proportionnelle à $\rho j\omega$ (ou $-\rho j\omega$ si on est en convention $e^{-j\omega t}$).

Cette dépendance à la fréquence complique l'interprétation des résultats lorsqu'on analyse des indices fréquentiels, comme la pression dans l'axe ou la puissance rayonnée. De plus, imposer une distribution de vitesse identique pour toutes les fréquences ne correspond pas à la réalité. La vitesse de vibration d'un haut-parleur est essentiellement gouvernée par sa fonction de transfert et sa consigne d'entrée. Pour étudier uniquement l'influence de l'enceinte, on a donc pris le parti de se ramener au cas d'une fonction de Green, dont l'amplitude en pression est constante à toutes les fréquences, en faisant la transformation :

$$p(\vec{OR}, \omega) \leftarrow \frac{1}{\rho j\omega} p(\vec{OR}, \omega)$$

Cette transformation est valable pour le modèle sphéroïdal et le modèle BEM, mais pas pour le modèle de diffraction qui est défini directement avec une fonction de Green comme source. Avec cette transformation, on assure la cohérence de la phase entre les trois modèles, qui auraient été en quadrature sinon.

Compensation monopolaire

Dès lors qu'on mesure une directivité, se pose la question de la référence de position de l'enceinte. Il est courant de mettre la source (i.e. le haut-parleur) au centre de la distribution des receveurs (i.e. micros). Cela permet de d'annuler l'effet de propagation

du son avec la distance R , qui peut-être caractérisé au premier ordre par une évolution monopolaire en $\frac{e^{jkR}}{R}$ si la taille de la source est petite devant la distance.

Cependant, les enceintes que l'on examine possèdent plusieurs haut-parleurs. Dès lors, changer de référentiel pour chaque haut-parleur manque de sens, puisque ceux-ci sont censés être utilisés de concert. Additionnellement, cela rendrait la mesure plus complexe (et même le calcul, pour le cas du modèle sphéroïdal). On préfère donc utiliser le centre de l'enceinte comme référence pour tous les haut-parleurs. Dans ce cas, chaque haut-parleur n'étant pas exactement au centre de la distribution des receveurs, nos données sont teintées de cet effet de propagation.

Lorsque les receveurs sont loin (≈ 10 m), cet effet est toujours négligeable. Dans ce cas aucun traitement n'est effectué. C'est généralement le cas pour nos calculs d'indice 3D (*Sound power* et *On-axis pressure*) et certains *Balloon plot*. Cependant, lorsqu'on se situe à des distances plus proches (≈ 1 m), comme par exemple lorsqu'on veut comparer nos mesures à nos modèles (i.e les figures de directivités horizontales et certains *Balloon plot*), cet effet n'est plus négligeable, voir Figure 1. Pour pouvoir interpréter les résultats en s'affranchissant de cet effet évident, on effectuera parfois la transformation suivante :

$$p(\vec{OR}, k) \leftarrow p(\vec{OR}, k) \frac{\|\vec{SR}\|}{e^{ik\|\vec{SR}\|}}$$

avec p la pression, O le centre de l'enceinte, R le receveur, S la source et k le nombre d'onde.

Le résultat d'une telle transformation est fondamental en basse-fréquence. Elle permet d'observer le comportement omnidirectionnel d'une enceinte de manière correcte, comme visible sur la Figure 2. Cette transformation permet aussi de mieux faire ressortir les lobes secondaires et la direction d'émission en haute-fréquence.

Normalisation par valeur maximum et cohérence à 0Hz

Les transformations précédentes posent des problèmes de normalisation. En effet, la normalisation usuelle par une valeur de référence perd de son sens. Les phénomènes que nous étudions étant relatifs aux directions de l'espace (étude de la directivité) ou aux fréquences (indices fréquentiels), on fait le choix de normaliser la pression par sa valeur maximum.

Cette valeur maximum est relative à un seul haut-parleur, et prise parmi l'ensemble des récepteurs considérés. La normalisation peut être effectuée pour chaque fréquence ou bien pour toute la plage de fréquences.

Le premier cas est nécessaire lorsque l'amplitude n'est pas comparable entre les différentes données. C'est par exemple le cas lorsque l'on compare des mesures à un modèle numérique. En effet, la fonction électro-mécanique réelle du haut-parleur n'est pas prise en compte dans le modèle, et n'est pas mesurée. Comme elle se traduit uniquement par un gain complexe (on rappelle que l'on a extrait la partie linéaire de la réponse), une normalisation à chaque fréquence permet de s'en affranchir. On fait également cette normalisation lorsque l'on compare un modèle avec une source étendue (BEM et modèle sphéroïdal) et

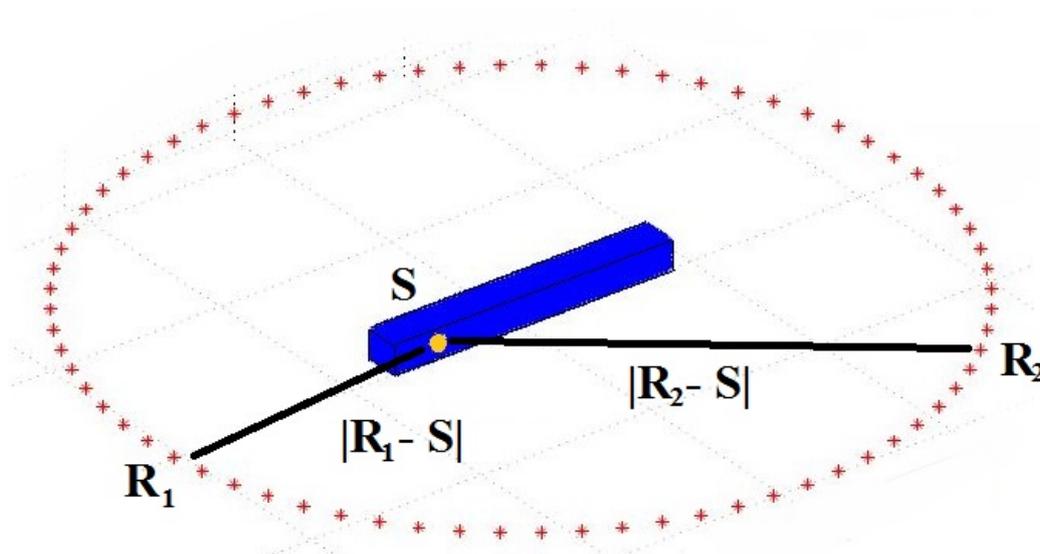


Figure 1 – Illustration de l'influence de propagation du son lorsque les micros ne sont pas centrés sur la source. La distance $\|R_1 - S\|$ étant plus petite que la distance $\|R_2 - S\|$, le son va paraître plus fort au récepteur R_1 qu'au récepteur R_2 .

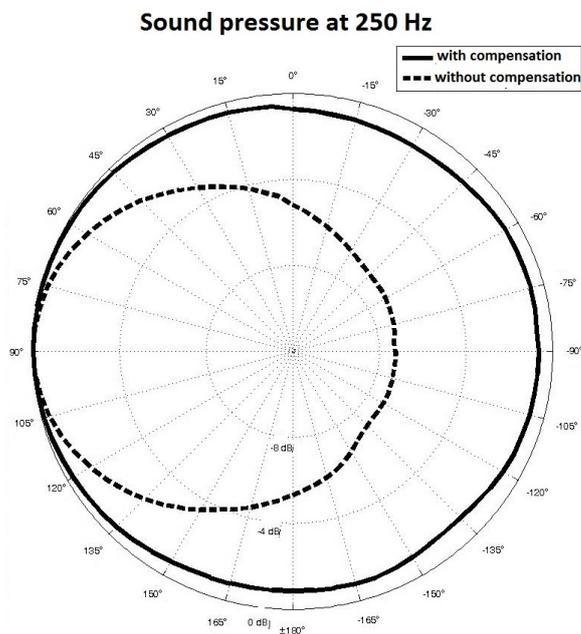


Figure 2 – Résultat de la compensation monopolaire en basse-fréquence. Le rayonnement paraît effectivement omnidirectionnel, comme il serait avec une référence au centre du haut-parleur.

un modèle avec une source ponctuelle (modèle de diffraction).

Cependant, cette normalisation à chaque fréquence nous fait perdre de l'information lorsqu'on compare le modèle BEM et le modèle sphéroïdal. En particulier, elle efface les effets d'interférences constructives et destructives, qui engendrent un gain plus fort pour une enceinte rectangulaire, bien qu'elle préserve quand même la notion de directivité. Pour ces modèles, on choisit la transformation suivante : on commence par faire coïncider la valeur maximale aux très basses fréquences des deux modèles. Cette valeur devrait être théoriquement la même pour les deux modèles mais des imprécisions de maillage des haut-parleurs peuvent interférer avec les résultats. On normalise ensuite les directivités par cette valeur sur tout le rang fréquentiel. De cette manière, on peut comparer le gain des deux enceintes lorsque la fréquence augmente. En revanche, on prendra la convention de 0 dB pour la valeur maximum des deux directivités sur toute la plage de fréquences, pour souligner leur caractère normalisé.

★ C ★

Coordonnées curvilignes et expression des opérateurs courants

Soit P un point de l'espace. Dans les coordonnées cartésiennes \mathcal{C} auxquelles on associe une origine O , on a $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

Coordonnées curvilignes. Un système de coordonnées quelconques est obtenu en se donnant trois fonctions arbitraires f_1, f_2, f_3 des paramètres u_1, u_2, u_3 , telles que :

$$\begin{aligned} x &= f_1(u_1, u_2, u_3) \\ y &= f_2(u_1, u_2, u_3) \\ z &= f_3(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \quad (1)$$

Si le système est réversible, i.e à chaque point de l'espace correspond un jeu unique de coordonnées (u_1, u_2, u_3) , alors les coordonnées sont curvilignes.

Les équations $u_i = \text{Cte}$ forment les surfaces coordonnées.

Coordonnées orthogonales. Un système de coordonnées est orthogonal si les trois surfaces coordonnées associées à un point de l'espace se rencontrent en formant un angle droit deux à deux en ce point. Un système de coordonnées orthogonal est un cas particulier des coordonnées curvilignes.

Coordonnées orthogonales à surface quadratique. Pour les espaces de dimension 3, il existe seulement 11 jeux de surface quadratique qui voient leurs coordonnées orthogonales¹. C'est dans ces systèmes de coordonnées que l'on applique communément la méthode de séparation des variables en physique.

Définition d'un base orthogonale. Soit un système \mathcal{S} de coordonnées orthogonales. Le différentiel du vecteur position (aussi appelé vecteur élémentaire de position) s'écrit :

$$d\overrightarrow{OP} = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial u_3} du_3$$

On peut alors définir le jeu de vecteur $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ formant une base associée à ces coordonnées, tel que :

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial u_i}$$

Une telle base est par définition orthogonale mais pas orthonormale. Pour obtenir cette propriété, il suffit de calculer la norme e_i du vecteur précédent dans la base cartésienne, i.e :

$$\begin{aligned} e_i &= \left\| \left(\frac{dx}{du_i}, \frac{dy}{du_i}, \frac{dz}{du_i} \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{df_1}{du_i}(u_1, u_2, u_3), \frac{df_2}{du_i}(u_1, u_2, u_3), \frac{df_3}{du_i}(u_1, u_2, u_3) \right) \right\| \end{aligned} \quad (2)$$

1. Moon, P. and Spencer, D. E. "Eleven Coordinate Systems." §1 in Field Theory Handbook, Including Coordinate Systems, Differential Equations, and Their Solutions, 2nd ed. New York : Springer-Verlag, pp. 1-48, 1988.

Les scalaires e_i sont appelés les facteurs d'échelles et sont fonctions des variables u_1 , u_2 et u_3 . On définit alors la base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ telle que :

$$\vec{e}_i = \frac{1}{e_i} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial u_i}$$

Le vecteur élémentaire de position est alors donné par :

$$\overrightarrow{dOP} = e_1 du_1 \vec{e}_1 + e_2 du_2 \vec{e}_2 + e_3 du_3 \vec{e}_3$$

Le vecteur élémentaire de surface (ou le différentiel d'une surface associée à son vecteur normal) est aussi immédiat en se positionnant à l'intersection des surfaces coordonnées :

$$d\vec{S} = e_2 e_3 du_2 du_3 \vec{e}_1 + e_1 e_3 du_1 du_3 \vec{e}_2 + e_1 e_2 du_1 du_2 \vec{e}_3$$

Expression du gradient. L'opérateur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}$ est défini par l'intermédiaire d'une fonction scalaire f . Pour une telle fonction prenant ses valeurs dans l'espace tridimensionnel, on pose :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dOP}$$

Or, le différentiel df de cette fonction est par définition :

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3$$

ce qui, en prenant en compte la définition de \overrightarrow{dOP} , donne

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{1}{e_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{e_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{e_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \vec{e}_3$$

Expression de la Divergence. L'expression de la divergence se déduit à partir du théorème d'Ostrogradski (ou théorème de la divergence), en considérant un cube dont on fait tendre son volume vers zéro. En considérant le flux entrant et sortant de ce cube, d'un champ vectoriel $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, dont les composantes sont exprimées dans \mathcal{B} , on peut montrer que la divergence s'écrit :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (e_2 e_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (e_1 e_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (e_1 e_2 A_3) \right)$$

Expression du Laplacien La composition des deux précédents opérateurs donne le Laplacien, qui, pour une fonction f , s'écrit finalement :

$$\Delta f = \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial f}{\partial u_1} \left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{e_1 e_3}{e_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \quad (3)$$

★ **D** ★

Parallel Hammerstein Model Identification using Sine Sweep and the Welch Method

Résumé

From IFAC Toulouse 14th july 2017

Parallel Hammerstein Models Identification using Sine Sweeps and the Welch Method

Vincent Roggerone* Marc Rébillat** Étienne Corteel***

* LMS, École Polytechnique, Palaiseau, France
(e-mail: rogger@lms.polytechnique).

** PIMM, Arts et Métiers - CNAM - CNRS, Paris , France

*** Sonic Emotion Labs, Paris, France

Abstract: Linearity is a common assumption for many real life systems. But in many cases, the nonlinear behavior of systems cannot be ignored and has to be modeled and estimated. Among the various classes of nonlinear models present in the literature, Parallel Hammerstein Models (PHM) are interesting as they are at the same time easy to understand as well as to estimate when using exponential sine sweeps (ESS) based methods. However, the classical EES-based estimation procedure for PHM relies on a very specific input signal (ESS), which limits its use in practice. A method is proposed here based on the Welch method that allows for PHM estimation with arbitrary sine sweeps (ASS) which are a much broader class of input signals than ESS. Results show that for various ASS, the proposed method provides results that are in excellent agreement with the ones obtained with the classical ESS method.

Keywords: Nonlinear system identification; Input and excitation design;

1. INTRODUCTION

Systems are generally assumed to behave linearly and in a noise-free environment. This is in practice not perfectly the case. First, nonlinear dynamic behaviors are very common in real life systems. Second, the presence of noise is a natural phenomenon that is unavoidable for all experimental measurements. In order to perform reliable model estimation of such systems, one should thus keep in mind these two issues and care about them. Indeed, all the noise that is not correctly removed from the measurements could be misinterpreted as nonlinearities, thus polluting measurements. And if nonlinearities are not accurately estimated, they will end up within the noise signal and information about the system under study will be lost.

The first problem addressed here is related to the estimation of nonlinear models of real life systems (Pearson, 1999; Kerschen et al., 2006). As nonlinear behaviors are complex and various and as it is not intended to build a model for each case, it is chosen here to rely on Parallel Hammerstein Models as they can be interpreted easily (see Fig. 1). Such models belong to the class of “Sandwich models” (Chen, 1995). Even if the model presented in Fig. 1 involves only monomial nonlinearities, it has been shown to possess a good degree of generality (Pearson, 1999). Classical estimation methods for this class of system rely on a least-square formulation of the problem but are computationally costly and prone to conditioning issues (Gallman, 1975). Hopefully, thanks to exponential sine sweeps (ESS), non-parametric versions of such models can be very easily and rapidly estimated (Novak et al., 2010, 2015; Rébillat et al., 2011, 2016). However, one drawback of these ESS based methods is that they rely on a specific class of input signals (ESS) that limits their use in practice.

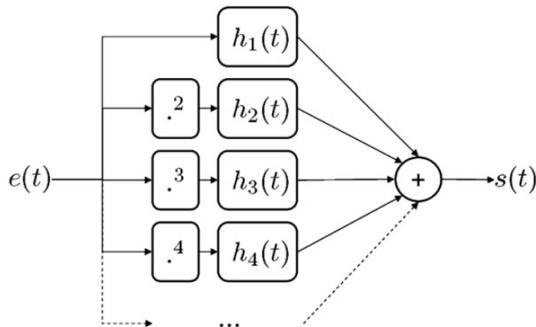


Fig. 1. Representation of parallel Hammerstein models

The second problem addressed here is related to the rejection of uncertainties caused by the presence of noise. One way to address this issue relies on a careful design of the excitation signal: special types of periodic excitations (Pintelon and Schoukens, 2001), non-stationary excitation with an underlying periodic structure (Zhang et al., 2010), or repeated ESS (Rébillat et al., 2016) for example. Another way to remove noise consists, independently of the input signal, to segment the output signal in several slices on which output noise is assumed to be independently distributed, as done in the classical Welch’s Method (Welch, 1967). This kind of approach is very attractive in the context of nonlinear system identification as it puts no constraints on the input signal.

The aim of this paper is thus to provide a methodology that allows for the estimation of Parallel Hammerstein Models based on the Welch method and on arbitrary sine sweeps (ASS). The paper is organized as follows: the classical ESS and Welch Methods are first briefly recalled in Section 2 and Section 3. Then the proposed method is

detailed in Section 4. Results comparing the classical ESS method with the proposed method for various ASS are provided in Section 5 before concluding in Section 6.

Note 1 : In this article, $*$ will stand for the convolution product. The convolution product between a function a and a function b will be denoted as $a(t) * b(t)$ instead of $a * b(t)$ in order to simplify some notations.

Note 2 : f will refer to the continuous frequency whereas k will refer to its discrete numeric version. Both will be used depending on the context.

2. EXPONENTIAL SINE SWEEP METHOD

A Parallel Hammerstein Model (PHM) is a relatively simple model of a weakly non-linear system (see Fig. 1). The input-output relation of such a model can be written as follows:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t) * x^n(t) \quad (1)$$

where $x(t)$ is the input of the system, $y(t)$ its output and $h_n(t)$ the kernels of the Hammerstein model.

Let's consider an arbitrary sine sweep (ASS) $x(t)$ as an input of a PHM truncated to the order N . Such a signal is defined as $x(t) = \sin[\phi(t)]$ with $\phi(t)$ a strictly increasing function of time. By using trigonometry formula, one can then write (Novak et al., 2010, 2015; Rébillat et al., 2011, 2016):

$$y(t) = \sum_{n=1}^N g_n(t) * \sin[n\phi(t)] \quad (2)$$

With $g_n(t) = \sum_{m=1}^n A_{mn} h_m(t)$ a linear combination of the kernels $h_m(t)$ with $m \leq n$. This clearly highlights the harmonics that commonly appear when measuring the frequency response of a nonlinear system.

The identification of a PHM consists in finding the set of kernels $h_n(t)$, by means of the known input $x(t)$ and the measured output $y(t)$. Let's consider the input $x(t)$ as an Exponential Sine Sweep (ESS) of duration T starting from a frequency f_1 and ending with a frequency f_2 . Its instantaneous frequency can then be written as follows:

$$2\pi f(t) = \phi'(t) = 2\pi f_1 \exp\left[\frac{t}{T} \ln(f_2/f_1)\right] \quad (3)$$

The integration of this formula then gives:

$$\phi(t) = 2\pi \frac{f_1 T}{\ln(f_2/f_1)} \exp\left[\frac{t}{T} \ln(f_2/f_1)\right] + C$$

with C a constant value. To be able to identify the kernels $h_n(t)$, the following relationship is desired and can be obtained by different means depending on the C value (Novak et al., 2010, 2015; Rébillat et al., 2011, 2016):

$$\sin[k\phi(t)] = \sin[\phi(t + \Delta_{t_k})] \quad (4)$$

Then, from Eq. (2) the following relationship is obtained:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N g_n(t) * \sin[\phi(t + \Delta_{t_n})]$$

The function $h(t)$ can then be computed as follows:

$$h(t) = y(t) * x_{-1}(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} g_n(t - \Delta_{t_k}) \quad (5)$$

with $x_{-1}(t)$ defined such that: $x(t) * x_{-1}(t) = \delta_0(t)$, where δ_0 is the Dirac distribution. This deconvolution operation is crucial for the ESS method and can be achieved by different means (Novak et al., 2015; Rébillat et al., 2011). Another way based on the Welch to perform this step is proposed in this article.

Note from Eq. (5) that the linear combination $g_n(t)$ of high order Hammerstein kernels $h_m(t)$, $m < n$ of the system are in advance in time of a given value Δ_{t_n} thanks to Eq. (4). This justifies the usefulness of this property. Then, the different terms $g_n(t)$ can be easily isolated by means of a simple temporal windowing of $h(t)$ and the kernel $h_n(t)$ can be found by inverting the linear combination defined by the matrix $\mathbf{A} = (A_{mn})_{1 \leq m, n \leq N}$. Also note that according to the classical ESS method implementation, the length T_{cut} of the temporal window used to extract $h(t)$ has to be smaller than $T \ln((N+1)/N) / \ln(f_2/f_1)$ where N is the maximal order being considered. Consequently, the power of the noise polluting the estimation is relative to this length T_{cut} . This temporal window is usually build with a Hanning window to avoid side effects.

3. WELCH METHOD

The Welch method was first introduced by Welch (1967) and provides an estimation of the cross power spectral density of two signals through an unbiased estimator that belongs to the modified periodogram class.

3.1 Cross power spectral density estimation

Let's assume the signals $x[n]$ and $y[n]$ to be realizations of length N_T of an ergodic and stationary process. By definition, the Cross Power Spectral Density (CPSD) of these signals is:

$$\Gamma_{xy}(k) = \mathcal{DFT} \left\{ \mathbb{E} \left[x[n] \overline{y[n-m]} \right] \right\} (k)$$

where \mathbb{E} denotes the expected value, \bar{a} the conjugate product of a and \mathcal{DFT} the Discrete Fourier Transform operation.

This CPSD can be estimated with a certain bias by means of the classical periodogram $S_{xy}(k)$, defined as follows:

$$S_{xy}(k) = \frac{1}{N_T f_s} \mathcal{DFT}[x](k) \mathcal{DFT}[\bar{y}](k)$$

Taking advantage of ergodicity and stationarity, another estimator of $\Gamma_{xy}(k)$ based on a temporal average process can also be defined. The idea is to split the signals x and y into P overlapping segments of length M containing each D overlapping sample using a window w , and to estimate the CPSD of each segment $\hat{\Gamma}_{xy}^p(k)$ through the periodogram before averaging it. An unbiased CPSD estimator can thus be defined as (Welch, 1967; Akcay, 2012):

$$\hat{\Gamma}_{xy}(k) = \frac{\alpha}{P} \sum_{p=1}^P \hat{\Gamma}_{xy}^p(k) = \frac{\alpha}{P} \sum_{p=1}^P S_{x_p y_p}(k) \quad (6)$$

with $x_p(k) = w[k]x[k+pD]$ and $y_p(k) = w[k]y[k+pD]$ and α a normalization factor such that: $\alpha = M / \sum_{m=1}^M |w(m)|^2$.

The main advantage of this approach is that when considering deterministic signals polluted by ergodic noise, the error committed will be relative to the noise power considered as a length M instead of length N_T . However, some spectral precision will necessarily be lost by using smaller windows than the single whole signal.

3.2 Linear system identification using CPSD

The Welch method has been largely used to estimate the frequency response of a linear system such as:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) + b(t) && \text{time domain} \\ Y(f) &= H(f)X(f) + B(f) && \text{frequency domain} \end{aligned}$$

where $y(t)$ is the output, $x(t)$ the input and $b(t)$ the noise, and $A(f) = \mathcal{FT}\{a(t)\}(f)$ where \mathcal{FT} denotes the Fourier transform. Note that $b(t)$ is one realization of a ergodic and stationary process with zero mean and then that $y(t)$ has the same statistical properties than this realization.

The simplest way to numerically estimate H is:

$$\hat{H}(f) \approx Y(f)/X(f)$$

and the error committed by doing so is proportional to the power of the noise which last the whole signal length. The idea is now to use the CPSD to define the transfer function and then to use the Welch method in order to reduce errors caused by noise. Using the fact that noise is uncorrelated with the input signal and the deterministic nature of $H(f)$, one obtains:

$$H(f) = \mathbb{E} \left[\frac{Y(f)\overline{X(f)}}{X(f)\overline{X(f)}} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{B_\Omega(f)\overline{X(f)}}{X(f)\overline{X(f)}} \right] = \frac{\Gamma_{xy}(f)}{\Gamma_{xx}(f)}$$

Then the error committed is here again proportional to the power of the noise as if it only lasts M samples.

4. WELCH SINE SWEEP OR CPSD METHOD

4.1 General idea of the method

Let's assume a PHM as defined by Eq. (1) and an input signal $x(t)$ defined to be an arbitrary sine sweep (ASS) as done in Eq. (2). That way $x(t) = \sin[\phi(t)]$ with ϕ a strictly increasing function of time. Then, at each time a single frequency is played by the input $x(t)$, involving an output $y(t)$ made up of a discrete set of harmonic frequencies. Indeed $y(t)$ is a linear combination of convolution products between harmonics and $g_n(t)$ functions as described in Eq. (2). This is illustrated in Fig. 2 which shows for a given frequency of the input the frequencies contained in the output of the PHM when considering an ASS as input.

The idea behind the Welch Sine Sweep method (also called CPSD method) is to be able to estimate the kernels of the PHM with the same precision than the ESS method but by releasing all the constraints on the sweep itself. As stated in Sec. 2, the ESS method is based on an ESS which leads, when provided as the input of a PHM and after a deconvolution, to time localized linear combination

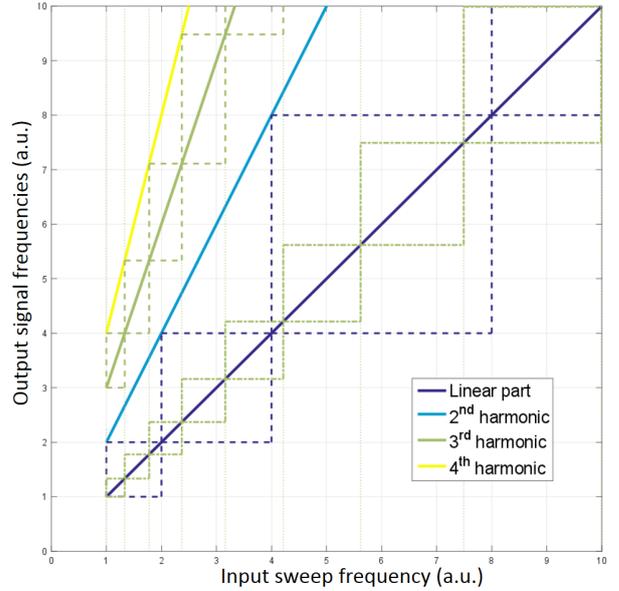


Fig. 2. Input sweep frequency versus output signal frequencies for a 4th order PHM and windowing choices examples (no overlap): linear part [optimal] (blue dashed lines), third harmonic [optimal] (green dashed lines), linear part [suboptimal] (green dot-dashed line).

$g_n(t)$ of kernels $k_n(t)$, see Eq. (5). A temporal windowing operation is then performed to extract the impulse responses $g_n(t)$. By making use of the properties of the Welch Method, we directly estimate the impulse responses $g_n(t)$ by performing a temporal windowing operation on slices of input and output signals. The deconvolution operation is avoided and all constraints on the sweep are thus released.

However, in order to still be able to estimate the non-linear model, this temporal windowing cannot be done arbitrarily. It must be done by taking into account the fact that the input signal is an ASS and the fact that the system under study is a PHM. A way to do so is to focus on the different harmonics one by one and to try to get information regarding them, and exclusively them, within a considered time window. The challenge is thus to be able to design temporal windows that ensure that the frequency content of the harmonic under study is contained within a frequency range that is not polluted by the other harmonics. If the harmonic of interest is the n^{th} harmonic, and if the selected windows starts with a frequency f_{start} , then the time at which this temporal window should stop is the time at which the the input frequency is such that $f_{\text{stop}} = (n+1)/n \times f_{\text{start}}$. Thus, the higher the harmonic order is, the smaller the largest window allowed is. This temporal window is called in the following the ‘‘optimal’’ window as it is the longest possible, but any shorter window is acceptable. Note that there is no constraints on the start frequency f_{start} and thus that the windows can start at any arbitrary time, allowing to use overlapped windows. This process is illustrated in Fig. 2 that shows two examples of optimal windowing choice (without overlapping) when focusing on the linear part (blue dashed lines) and when focusing on the third harmonic (green dashed lines). It is also shown how this ‘‘optimal temporal windowing’’ choice derived

when focusing on the third harmonic can be applied to the linear part in green dot-dashed line and thus become suboptimal with respect to the linear part.

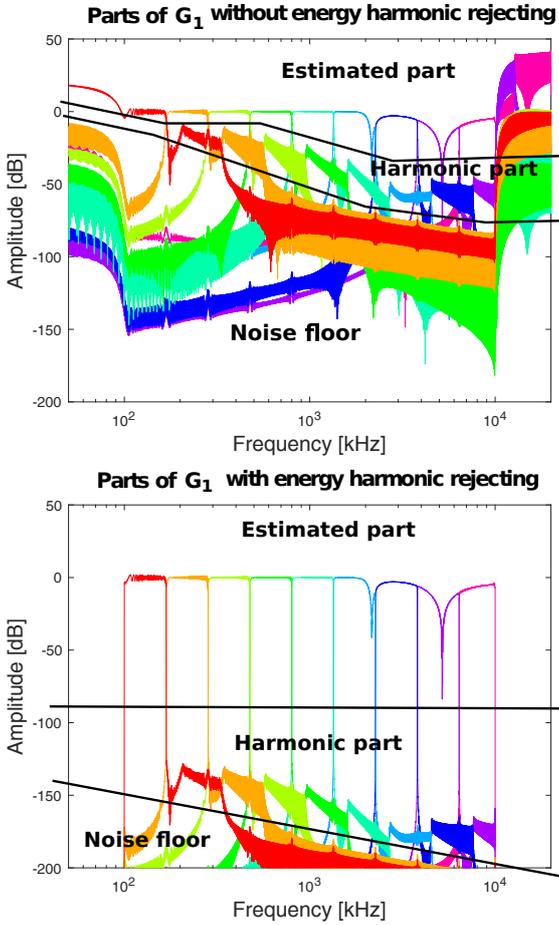


Fig. 3. Estimation of $G_1(f)$ over unity time windows without overlap. *Top*: strict application of Eq. (7). *Bottom*: application of Eq. (7) with regularization (see Sec. 4.3). Time windows are built from Eq. (9) for $n = 1$ with a security factor $3/4$ (see Sec. 4.2). See Sec. 5.2 for details regarding the simulated system.

Then, due to the linearization of the trigonometric functions given in Eq. (2), it is possible isolate from the selected windows the exact harmonic contribution $G_n(f) = \mathcal{FT}[g_n(t)](f)$ of the n^{th} harmonic in the frequency domain. However, as the information we try to infer from these windows is related to the n^{th} harmonic, the n^{th} harmonic of the input signal has to be used in the estimation process. The function $G_n(f)$ can thus be directly by using the Welch method described in Section 3 over the selected temporal windows and using the n^{th} harmonic $x_n(t) = \sin[n\phi(t)]$ as input instead of the actual input $x(t) = \sin[\phi(t)]$. This is illustrated in Fig. 3 where the parts of $G_1(f)$ estimated by each window are plotted. Formally, using notations of Eq. (6), what has been done to estimate $G_n(f)$ is:

$$\hat{G}_n(f) = \frac{\hat{\Gamma}_{x_n y}(f)}{\hat{\Gamma}_{x_n x_n}(f)} = \frac{\sum_{p=1}^P \hat{\Gamma}_{x_n y}^p(f)}{\sum_{p=1}^P \hat{\Gamma}_{x_n x_n}^p(f)} \quad (7)$$

From the estimated $\hat{G}_n(f)$, it is then possible to recover the kernels $H_n(f)$ of the PHM by inverting the linear combination defined by the matrix \mathbf{A} as in Sec. 2.

Note that contrary to the classical ESS implementations (Novak et al., 2010, 2015; Rébillat et al., 2011, 2016), this method does not need an ESS satisfying any fundamental phase property as in Eq. (4). The only condition that needs to be satisfied here is related to the function $\phi(t)$ that needs to be known explicitly in order to determine the frequency bandwidth of each segment and thus the windows lengths that suit the Welch method.

4.2 Design of temporal windows for the CPSD estimator

As stated previously, a temporal window series relative to an harmonic of interest is said to be acceptable if : for all the segment of this temporal window series, the spectral content relative to the harmonic of interest is not overlapping with the spectral content of other harmonics (see Fig. 2). Then, it is possible to build the maximum length of each temporal window by building rectangles around each harmonic straight lines. Mathematically, it is demonstrated by recurrence that when focusing on the harmonic n , the p^{th} temporal window of the series of temporal windows starting at frequency f_0^n and with no overlap should stop at a time such that the frequency of the input signal corresponds at this time to:

$$f_p^n = f_0^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \quad (8)$$

This grid is defined in the frequency domain. It is then necessary to go back to the temporal domain by making use of the instantaneous frequency derived from the phase function $\phi(t)$. If we consider the phase given in Eq. (3), this gives the following series of times:

$$t_p^n = \frac{T}{\ln(f_2/f_1)} \left[\ln(f_0^n/f_1) + p \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right] \quad (9)$$

Note that this interestingly leads to regularly spaces times for this particular case of an ESS. Additionally, the step is the same as the maximum length of temporal window in the ESS method, see section 5.2. This will lead to an equivalent noise rejection for the two method.

If we consider now the phase of a linear sweep, *i.e.* a sweep with the instantaneous frequency such that :

$$f(t) = f_1 + \frac{f_2 - f_1}{T} t \quad (10)$$

then the associated series of time is given by :

$$t_p^n = \frac{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{p-1}}{f_2 - f_1} f_1 T \quad (11)$$

and the series of “optimal windows” is defined by

$$T_p^n = t_p^n + t_{p-1}^n = \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{p-1} \frac{f_1 T}{f_2 - f_1} \quad (12)$$

To remain simple, we keep a grid regularly spaced in time for each order. Therefore, the step of the temporal grid associated to the linear sweep is defined by the smallest time window, which is T_1^n in this case.

4.3 Regularization procedure

The computation of the inverse filter $x_{-1}(t)$ (see Sec. 2) is crucial to reject unwanted harmonics. Because the CPSD estimation is based on the temporal windowing of the signals, the regularization procedure proposed by Rébillat et al. (2011, 2016) applies naturally here. Thus, the following regularization procedure is performed in order to reject efficiently unwanted harmonics:

$$\hat{\Gamma}_{x_n x_n}(f) = \begin{cases} \hat{\Gamma}_{x_n x_n}(f) & \text{if } n f_1 < f < n f_2 \\ \hat{\Gamma}_{x_n x_n}(f) + \epsilon_x \times \max_f [\Gamma_{x_n x_n}(f)] & \text{else.} \end{cases}$$

with ϵ_x an arbitrary factor. However, this will only affect the exterior part of the frequencies played by the input signal. This will not reject the higher harmonics which are within the interval of the frequency played (see Fig. 3). Therefore, an additional regularization operation is performed for each segment to reduce the energy of the partial part $\hat{\Gamma}_{x_n y}^p(f)$ of the quantity $\hat{\Gamma}_{x_n y}(f)$ outside of the frequency range relative to this segment (see Eq. (7)):

$$\hat{\Gamma}_{x_n y}^p(f) = \begin{cases} \hat{\Gamma}_{x_n y}^p(f) & \text{if } f_{p-1}^n < f < f_p^n \\ \hat{\Gamma}_{x_n y}^p(f)/\epsilon_y & \text{else.} \end{cases}$$

with ϵ_y an arbitrary factor. Both ϵ_x and ϵ_y are taken equal to 10^{10} . This effect is illustrated on Fig. 3. In each figures, 3 zones can be distinguished: the estimated part, the rejected harmonics, and the noise floor. The top figure is the straight application of the method whereas the bottom figure includes the regularization procedure proposed here. As can be seen from this figure, the proposed regularization really helps in rejecting unwanted harmonics components.

5. COMPARISON ON A SIMULATED SYSTEM

5.1 Implementation details

Demonstration of the efficiency of the CPSD method is done with two kind of ASS : an exponential sine sweep to compare results with the classical ESS method; and a linear sine sweep (LSS) to illustrate the potential of the method. All the ASS are 5 seconds long and starting at frequency 200 Hz and rising up to 10 kHz with a sampling frequency of 96 kHz. For the CPSD method, the classical value of 50% of overlapping segments pondered with Hanning windows has been retained.

For the ESS, the series of time used in CPSD method is defined according to Eq. (9). The step has been multiplied by a *security factor* equal to 3/4 which reduces the length of the time windows. This is done to avoid the spectral content from the next upper harmonic to be too close to the spectral content of interest. Because of the overlapping of 50%, the final series of time is given by:

$$t_p = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times p \times \frac{T \ln[(N+1)/(N)]}{\ln(f_2/f_1)} \quad (13)$$

Note that the p^{th} segment is composed by the points $[t_p, t_{p+2}]$ because of the 50 % overlapping.

In the same way, the series of times relative to the LSS for the CPSD method is (see Sec. 4.2) :

$$t_p^n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \frac{1}{n} \frac{f_1 T}{f_2 - f_1} \quad (14)$$

Note that this time, we used a different grid for each order in order n to keep a good precision in the low frequency range.

In the ESS method, after deconvolution of the output signal, each harmonic impulse response is localized in advance from the linear part and is extracted by a simple temporal windowing of length T_{cut} (see Sec. 2). As stated in Sec. 4.1 and 3.2, this parameter has an equivalent role than the step of the CPSD series of time. Then the value $T_{\text{cut}} = 3/4T \ln((N+1)/N)/\ln(f_2/f_1) \approx 0.21$ s is kept. Note that for the linear case, the equivalent value of T_{cut} extracted from the CPSD method is $T_{\text{cut}} = 3/4T f_1/(n(f_2 - f_1)) \approx 0.076$ s ($n = 1$) or 0.019 s ($n = 4$). Because the windows are smaller for the LSS, the noise will have a lower influence on the estimated kernels in comparison with the ESS.

5.2 Simulated system

We simulated a PHM system of order 4. The linear part is modeled by a Chebyshev filter of Type II of order 4 with a cutoff frequency of 2 kHz. The harmonic parts are modeled with ARMA filters of order 2 defined by the coefficients given in Tab. 1.

Table 1. Coefficients of the ARMA filters used to model high order kernels

Order	a_0	a_1	a_2	b_0	b_2	b_2
2	1.0000	-1.8996	0.9025	0.0500	-0.0951	0.0470
3	1.0000	-1.9075	0.9409	0.0250	-0.0474	0.0226
4	1.0000	-1.8471	0.8649	0.0087	-0.0115	0.0056

We also add a Gaussian white noise to the output signal $y(t)$. Numerous SNR , PHM order N and different length of sweep have been tested showing identical results. We kept the representative value of $N = 4$, $SNR = 40$ dB and a duration of 5 s to present results. However a small discussion about computation time as a function of the sweep length and PHM order is given later.

5.3 Results

The PHM Kernels estimated through the classical ESS method and the proposed Welch Sine Sweep Method for the two kind of sweeps versus the theoretical ones are presented in the frequency domain in Fig. 4. From this figure, it can be seen that as expected both methods provides estimated Kernels that are in good agreement with the theoretical ones. The PHM Kernels estimation through a LSS is only possible with the CPSD method. As expected, the noise is more rejected with this sweep than with the ESS as the windows used are smaller. Note that because the LSS spends more time in high frequency than in low frequency as compared to the ESS, the estimation obtained with the LSS is better in high frequencies than in low frequencies. Finally, note that the ESS method only requires a single deconvolution whereas the CPSD method need as much FFT as the number of temporal windows being used. Then the longer is the signal, the higher is the computational cost of the CPSD method. Also, because the largest acceptable length of window depends on the

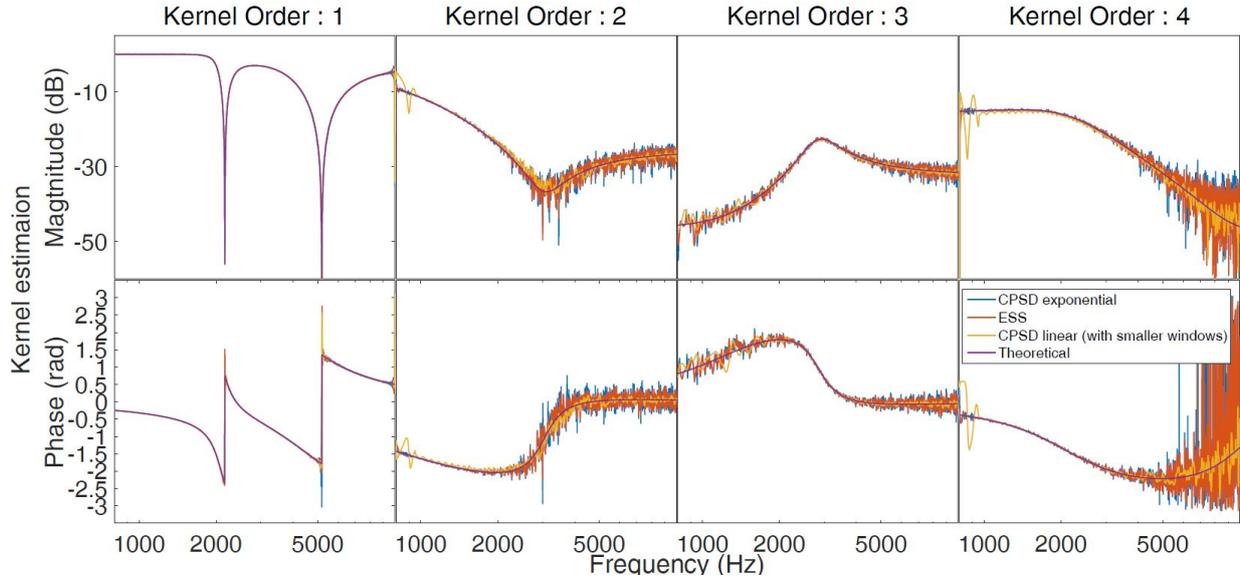


Fig. 4. PHM Kernels estimated through the classical exponential sine sweep method (ESS) and the proposed Welch Sine Sweep Method (CPSD) for two kind of sweeps versus theoretical ones in the frequency domain ($SNR = 40$ dB).

maximum order N of the PHM, the more complex is the system, the higher is the computational cost of the CPSD method. Some computation times are given in Tab. 2.

Table 2. Comparison of computation times between CPSD (ESS) and ESS method.

Method	$N = 4$	$N = 4$	$N = 7$	$N = 7$
	$T = 1$ s	$T = 5$ s	$T = 1$ s	$T = 5$ s
ESS	0.016	0.050	0.017	0.049
CPSD	0.168	0.427	0.277	0.957

6. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

In this article, a new method to estimate a Parallel Hammerstein Models based on the Welch estimator of the cross power spectral density is proposed and validated. This method is compared to the classical ESS method on a simulated system with noise. It is shown that the proposed method releases all constraints on the input sweep in comparison with the classic ESS method at the cost of a longer computational time. Results provided by both methods are found to be almost identical. Because constraints on sine sweep are released and it is harmonic based, this new method is very attractive as it could be used with contextual sweeps (related to the power spectral density of the environmental noise for example) or be the basis of a nonlinear model estimation with input harmonic signals such as music, which corresponds to a strong demand of professionals in loudspeaker measurement.

REFERENCES

- Akçay, H. (2012). Estimation of cross-power and auto-power spectral densities in frequency domain by subspace methods. In *51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 3445–3450.
- Chen, H.W. (1995). Modeling and identification of parallel nonlinear systems: Structural classification and parameter estimation methods. *Proceedings of the IEEE*, 83(1), 39–66.
- Gallman, P.G. (1975). Iterative method for identification of nonlinear-systems using a Uryson model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(6), 771–775.
- Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A.F., and Golinval, J.C. (2006). Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(3), 505–592.
- Novak, A., Simon, L., Kadlec, F., and Lotton, P. (2010). Nonlinear system identification using exponential swept-sine signal. *IEEE Transactions On Instrumentation and Measurement*, 59(8), 2220–2229.
- Novak, A., Lotton, P., and Simon, L. (2015). Synchronized swept-sine: Theory, application, and implementation. In Kerschen et al. (2006), 786–798.
- Pearson, R.K. (1999). *Discrete-Time Dynamic Models*. Oxford University Press.
- Pintelon, R. and Schoukens, J. (2001). *System Identification: A Frequency Domain Approach*. IEEE-press, Piscataway.
- Rébillat, M., Ege, K., Gallo, M., and Antoni, J. (2016). Repeated exponential sine sweeps for the autonomous estimation of nonlinearities and bootstrap assessment of uncertainties. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 230(6), 1007–1018.
- Rébillat, M., Hennequin, R., Corteel, E., and Katz, B.F. (2011). Identification of cascade of hammerstein models for the description of nonlinearities in vibrating devices. *Journal of sound and vibration*, 330, 1018–1038.
- Welch, P. (1967). The use of fft for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2), 70–73.
- Zhang, E., Antoni, J., Pintelon, R., and Schoukens, J. (2010). Fast detection of system nonlinearity using nonstationary signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24, 2065–2075.

Références

- [1] R. M. AARTS et A. J. E. M. JANSSEN. Comparing sound radiation from a loudspeaker with that from a flexible spherical cap on a rigid sphere. *Journal of Audio Engineering Society*, 59(4) :201–212, avril 2011.
- [2] R. M. AARTS et A. J. E. M. JANSSEN. Sound radiation from a resilient spherical cap on a rigid sphere. *Journal of Audio Engineering Society*, 127(4) :2262–2273, 2010.
- [3] R. ADELMAN, N. A. GUMEROV et R. DURAIWAMI. Semi-analytical computation of acoustic scattering by spheroids and disks. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(6) :405–410, décembre 2014.
- [4] I. V. ANDRONOV. High-frequency acoustic scattering from prolate spheroids with high aspect ratio. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 134(6) :4307–4315, décembre 2013.
- [5] I. V. ANDRONOV. Point source diffraction by a strongly elongated spheroid. *Journal of Sound and Vibration*, 355 :360–368, octobre 2015.
- [6] L. ANTANI, A. CHANDAK, M. TAYLOR et D. MANOCHA. Efficient finite-edge diffraction using conservative from-region visibility. *Applied Acoustics*, 73(3) :218–233, 2012.
- [7] A. ASHEIM et U. P. SVENSSON. Efficient evaluation of edge diffraction integrals using the numerical method of steepest descent. *Journal of Acoustical Society of America*, 128(4) :1590–1597, octobre 2010.
- [8] A. ASHEIM et U. P. SVENSSON. An integral equation formulation for the diffraction from convex plates and polyhedra. *Journal of Acoustical Society of America*, 133(6) :3681–3692, juin 2013.
- [9] M. AZARPEYVAND. Active noise cancellation of a spherical multipole source using a radially vibrating spherical baffled piston. *Acoustical Physics*, 51(6) :709–7020, 2005.
- [10] M. R. BAI. Application of bem (boundary element method)-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92(1) :533–550, juillet 1992.
- [11] H. BARUCQ, A.-G. DUPOUY ST-GUIRONS et S. TORDEUX. Non-reflecting boundary condition on ellipsoidal boundary. *Numerical Analysis and Applications*, 5(2) :109–115, 2012.
- [12] K. J. BASTYR et D. E. CAPONE. On the acoustic radiation from a loudspeakers cabinet. *Journal of Audio Engineering Society*, 2003.

- [13] R. M. BEWS et M. J. HAWKSFORD. Application of the geometric theory of diffraction at the edges of loudspeaker baffles. *Journal of Audio Engineering Society*, 34(10) :771, octobre 1986.
- [14] M. A. BIOT et I. TOLSTOY. Formulation of wave propagation in infinite media by normal coordinates with an application to diffraction. *Journal of Acoustical Society of America*, 29(3) :381–391, mars 1957.
- [15] W. K. BLAKE et G. A. WILSON. Short-wavelength diffracted surface pressures on a rigid prolate spheroid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(6) :1419–1427, juin 1977.
- [16] J. E. BOISVERT et A. L. VAN BUREN. Acoustic directivity of rectangular pistons on prolate spheroids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(4) :1932–1937, octobre 2004.
- [17] J. E. BOISVERT et A. L. VAN BUREN. Acoustic radiation impedance and directional response of rectangular pistons on elliptic cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(1) :104–112, juillet 2005.
- [18] J. E. BOISVERT et A. L. VAN BUREN. Acoustic radiation impedance of rectangular pistons on prolate spheroids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(2) :867–874, 2002.
- [19] M. BONNET. *Boundary integral equations methods in solids and fluids*. John Wiley et sons, 1999, xx+391 pages.
- [20] L. BOUCHET, T. LOYAU, N. HAMZAOUI et C. BOISSON. Calculation of acoustic radiation using equivalent-sphere methods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(5) :2387–2397, 2000.
- [21] D. S. BURNETT. A three-dimensional acoustic infinite element based on a prolate spheroidal multipole expansion. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96(5) :2798–2816, novembre 1994.
- [22] D. S. BURNETT. Radiation boundary conditions for the helmholtz equation for ellipsoidal, prolate spheroidal, oblate spheroidal and spherical domain. *Journal of Computational Acoustics*, 20(04), décembre 2012.
- [23] J. L. BUTLER et A. L. BUTLER. A fourier series solution for the radiation impedance of a finite cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104(5) :2773–2778, novembre 1998.
- [24] P. T. CALAMIA et U. P. SVENSSON. Fast time-domain edge-diffraction calculations for interactive acoustic simulations. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2007(1) :063560, décembre 2006.
- [25] P. T. CALAMIA. *Advances in Edge-Diffraction Modeling for Virtual-Acoustic Simulations*. Thèse de doctorat, Faculty of Princeton University, juin 2009.
- [26] D. C. CALVO. A wide-angle on-surface radiation condition applied to scattering by spheroids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(3) :1459–1558, 2004.

- [27] J. CANDY. Accurate calculation of radiation and diffraction from loudspeaker enclosures at low frequency. *Journal of Audio Engineering Society*, 2013.
- [28] F. CAPOLINO, I. M. ALBANI, S. MACI et R. TIBERIO. Double diffraction at a pair of coplanar skew edges. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(8) :1219–1226, août 1997.
- [29] F. CAPOLINO. Time domain double diffraction at a pair of coplanar skew edges. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 53(4) :1455, avril 2005.
- [30] A. H. CARTER et A. O. WILLIAMS. A new expansion for the velocity potential of a piston source. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 23(2), 1951.
- [31] G. CHERTOCK. Sound radiation from prolate spheroids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 33(7) :871, juillet 1961.
- [32] D. CHU. Impulse response of density contrast wedge using normal coordinates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 86(5) :1883–1896, 1989. eprint : <http://dx.doi.org/10.1121/1.398567>.
- [33] D. CHU, T. K. SANTON et A. D. PIERCE. Higher-order acoustic diffraction by edges of finite thickness. *Journal of Acoustical Society of America*, 122(6) :3177–3194, décembre 2007.
- [34] V. P. CHUMACHENKO, A. V. KRAPYVNY et Y. V. CHUMACHENKO. An estimation method for acoustic scattering from convex bodies. *Journal of Sound and Vibration*, 310(4-5) :845–854, mars 2008.
- [35] C. S. CLAY et W. A. KINNEY. Numerical computations of time-domain diffractions from wedges and reflections from facets. *Journal of Acoustical Society of America*, 83(6) :2126–2133, juin 1988.
- [36] E. CORTEEL, D. PESCE, R. FOULON, G. PALLONE, F. CHANGENET et H. DEJARDIN. An open 3d audio production chain proposed by the edison 3d project. In *Audio Engineering Society Convention 140*, mai 2016.
- [37] K. A. CUNEFARE, M. N. CURREY, M. E. JOHNSON et S. J. ELLIOTT. The radiation efficiency grouping of free-space acoustic radiation modes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(1) :203–215, janvier 2001.
- [38] K. A. CUNEFARE, G. KOOPMANN et K. BROD. A boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1989.
- [39] J. L. S. EMETERIO et L. G. ULLATE. Diffraction impulse response of rectangular transducers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92(651), 1992.
- [40] A. FARINA. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique. In *Audio Engineering Society Convention 108*, février 2000.

-
- [41] E. FERNANDEZ GRANDE. *Sound Radiation from a Loudspeaker Cabinet using the Boundary Element Method*. Thèse de doctorat, Department of Acoustic Technology, Technical University of Denmark., 2008.
- [42] C. FLAMMER. *Spheroidal Wave Functions*. Monograph. Stanford University Press, 1957.
- [43] M. GANESH. Fully discrete spectral methods for boundary integral equations on slender spheroids. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 164-165 :307–322, mars 2004.
- [44] E. GEDDES, J. PORTER et Y. TANG. A boundary-element approach to finite-element radiation problems. *Journal of Audio Engineering Society*, 35(4), avril 1987.
- [45] W. GORDON. Far-field approximations to the kirchoff-helmholtz representations of scattered fields. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 23(4) :590–592, juillet 1975.
- [46] M. GREENSPAN. Piston radiator : some extensions of the theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 65(3), 1979.
- [47] J. E. GREENSPON et C. H. SHERMAN. Mutual-radiation impedance and near-field pressure for pistons on a cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(1) :149–153, janvier 1964.
- [48] G. R. HARRIS. Review of transient field theory for a baffled planar piston. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(10), 1981.
- [49] T. HASEGAWA, N. INOUE et K. MATSUZAWA. A new rigorous expansion for the velocity potential of a circular piston source. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 74(3), 1983.
- [50] D. P. HEWETT et A. MORRIS. Diffraction by a right-angled impedance wedge : an edge source formulation. *arXiv :1409.6131v1 [math.AP]*, 2014.
- [51] D. HURLBURT. Complete response function and system parameters for a loudspeaker with passive radiator. *Journal of Audio Engineering Society*, 48(3) :147–163, mars 2000.
- [52] J. JI, G. LIANG, Y. WANG et W. LIN. Influences of prolate spheroidal baffle of sound diffraction on spatial directivity of acoustic vector sensor. *Science China Technological Sciences*, 53(10) :2846–2852, septembre 2010.
- [53] C. H. JIANG, T. Y. KAM et Y. H. CHANG. Sound radiation of panel-form loudspeaker using flat voice coil for excitation. *Applied Acoustics*, 116 :375–389, janvier 2017.
- [54] Y. KAGAWA, T. YAMABUCHI, K. SUGIHARA et T. SHINDOU. A finite element approach to a coupled structural acoustic radiation system with application to loudspeaker radiation characteristic calculation. *Journal of Sound and Vibration*, 69(2) :229–243, 1980.

- [55] M. KARJALAINEN, V. IKONEN, P. ANTSALO, P. MAIJALA, L. SAVIOJA, A. SUUTALA et S. POHJOLAINEN. Comparison of numerical simulation models and measured low-frequency behavior of loudspeaker enclosures. *Journal of Audio Engineering Society*, 49(12) :1148–1166, décembre 2001.
- [56] N. KAZARINOFF et R. RITT. On the theory of scalar diffraction and its application to the prolate spheroid. *Annals of Physics*, 6(3) :277–299, 1959.
- [57] R. S. KEIFFER et J. C. NOVARINI. A time domain rough surface scattering model based on wedge diffraction : application to low-frequency backscattering from two-dimensional sea surfaces. *Journal of Acoustical Society of America*, 107 :27–40, janvier 2000.
- [58] R. S. KEIFFER, J. C. NOVARINI et R. W. SCHARSTEIN. A time-variant impulse response method for acoustic scattering from moving two-dimensional surfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(3) :1283–1299, 2005. eprint : <http://dx.doi.org/10.1121/1.1992687>.
- [59] J. B. KELLER. Geometrical theory of diffraction. *Journal of the Optical Society of America*, 52(2) :116, février 1962.
- [60] B. KING et A. L. VAN BUREN. A general addition theorem for the spheroidal wave functions. *Siam. J. Math. Anal.*, 4(1), février 1973.
- [61] W. A. KINNEY, C. S. CLAY et G. A. SANDNESS. Scattering from a corrugated surface : comparison between experiment, helmholtz-kirchhoff theory, and the facet-ensemble method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 73(1) :183–194, 1983. eprint : <http://dx.doi.org/10.1121/1.388836>.
- [62] P. KIRBY. Calculation of radial prolate spheroidal wave functions of the second kind. *Computer Physics Communications*, 181(3) :514–519, mars 2010.
- [63] S. M. KIRKUP. Computational solution of the acoustic field surrounding a baffled panel by the rayleigh integral method.pdf. *Appl. Math. Modeling*, 18, juillet 1994.
- [64] S. M. KIRKUP et M. A. JONES. Computational methods for the acoustic modal analysis of an enclosed fluid with application to a loudspeaker cabinet. *Applied Acoustics*, 48(4) :275–199, 1996.
- [65] A. I. KLEEV et A. G. KYURKCHAN. Application of the pattern equation method in spheroidal coordinates to solving diffraction problems with highly prolate scatterers. *Acoustical Physics*, 61(1) :19–27, janvier 2015.
- [66] W. KLIPPEL. Diagnosis and remedy of nonlinearities in electrodynamic transducers. In *109th AES Convention Los Angeles*, septembre 2000.
- [67] W. KLIPPEL. Nonlinear large signal behavior of electrodynamic loudspeakers at low frequencies, *Journal of Audio Engineering Society*, 40 :483–496, 1992.
- [68] M. KOLUNDŽIJA, C. FALLER et M. VETTERLI. Baffled circular loudspeaker array with broadband high directivity. In *2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 73–76, mars 2010.

- [69] A. D. KOTSIK et J. A. ROUMELIOTIS. Acoustic scattering by a penetrable spheroid. *Acoustical Physics*, 54(2) :153–167, mars 2008.
- [70] S. KOYAMA, K. FURUYA, K. WAKAYAMA, S. SHIMAUCHI et H. SARUWATARI. Analytical approach to transforming filter design for sound field recording and reproduction using circular arrays with a spherical baffle. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(1024), 2016.
- [71] D. T. LAIRD et H. COHEN. Directionality patterns for acoustic radiation from a source on a rigid cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 24(1) :46–49, janvier 1952.
- [72] M.-V. LAITINEN, A. POLITIS, I. HUHTAKALLIO et V. PULKKI. Controlling the perceived distance of an auditory object by manipulation of loudspeaker directivity. *JASA Express Letters*, 2015.
- [73] J. LEE et I. SEO. Radiation impedance computations of a square piston in a rigid infinite baffle. *Journal of Sound and Vibration*, 198(3) :299–312, 1996.
- [74] K. LEE et W. SEONG. Time-domain kirchhoff model for acoustic scattering from an impedance polygon facet. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 126(1) :EL14–EL21, 2009.
- [75] W. M. LEE et J. T. CHEN. Computation of scattering of a plane wave from multiple prolate spheroids using the collocation multipole method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 140(4) :2235–2246, octobre 2016.
- [76] T. W. LEISHMAN, S. ROLLINS et H. M. SMITH. An experimental evaluation of regular polyhedron loudspeakers as omnidirectional sources of sound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(3) :1411–1422, septembre 2006.
- [77] B. R. LEVY et J. B. KELLER. Diffraction by a spheroid. *Can. J. Phys.*, 1960.
- [78] F. J. LOWES et D. E. WINCH. Orthogonality of harmonic potentials and fields in spheroidal and ellipsoidal coordinates : application to geomagnetism and geodesy. *Geophysical Journal International*, 191 :491–507, 2012.
- [79] S. R. MARTIN et U. P. SVENSSON. Double diffraction models : a study for the case of non-convex bodies. In *Forum Acusticum 2014*, 2014.
- [80] T. D. MAST et F. YU. Simplified expansions for radiation from a baffled circular piston. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(6) :3457–3464, décembre 2005.
- [81] C. MAURY et T. BRAVO. Spheroidal wave solutions for sound radiation problems in the near-field of planar structures. *Wave Motion*, 54 :11–27, avril 2015.
- [82] H. MEDWIN. Shadowing by finite noise barriers. *Journal of Acoustical Society of America*, 69(4), avril 1981.

- [83] H. MEDWIN, E. CHILS et G. M. JEBSEN. Impulse studies of double diffraction : a discrete Huygens interpretation. *Journal of Acoustical Society of America*, 72(3) :1005–1013, septembre 1982.
- [84] J. MEIXNER, F. SCHÄFKE et G. WOLF. *Mathieu Functions and Spheroidal Functions and their Mathematical Foundations : Further Studies*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1954.
- [85] T. MELLOW et L. KÄKKÄINEN. A dipole loudspeaker with a balanced directivity pattern. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(5) :2749–2757, novembre 2010.
- [86] P. MENOUNOU, I. J. BUSCH-VISHNIAC et D. T. BLACKSTOCK. Directive line source model : a new model for sound diffraction by half planes and wedges. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(6) :2973–2986, 2000. eprint : <http://dx.doi.org/10.1121/1.429327>.
- [87] P. MENOUNOU et P. NIKOLAOU. An extension to the directive line source model for diffraction by half planes and wedges. *Acta Acustica united with Acustica*, 102(2) :307–321, 2016.
- [88] T. MILOH. Acoustic scattering on spheroidal shapes near boundaries. *Acoustical Physics*, 62(6) :663–671, novembre 2016.
- [89] A. MONTAZERI et J. POSHTAN. Modeling of coupling of loudspeakers for anc system in a confined space. In *2008 International Conference on Electronic Design*, pages 420–426, 2008. International Conference on Electronic Design, Penang, MALAYSIA, DEC 01-03, 2008.
- [90] A. MONTAZERI, J. POSHTAN et M. POSHTAN. Analysis of the behavior of coupled loudspeakers in a mimo anc system in an enclosure. In *2010 IEEE International Conference on Control Applications*, IEEE International Conference on Control Applications, pages 228–233, 2010. IEEE International Conference on Control Applications Part of 2010 IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Yokohama, JAPAN, SEP 08-10, 2010.
- [91] I. C. MOORE et M. CADA. Prolate spheroidal wave functions, an introduction to the Slepian series and its properties. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 16(3) :208–230, mai 2004.
- [92] P. NISHAMOL, J. MATHEW et D. EBENEZER. Acoustic radiation from cylindrical transducer arrays. *Journal of Sound and Vibration*, 323(3-5) :989–1002, juin 2009.
- [93] J. NISULA, J. HOLM et A. MAKIVIRTA. Calculating sound radiation from loudspeaker enclosures using the finite element analysis. In *AES 51st International Conference, Helsinki, Finland, 2013 August 22-24*, 2013.
- [94] A. NOVAK, L. SIMON, F. KADLEC et P. LOTTON. Nonlinear system identification using exponential swept-sine signal. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 59(8) :2220–2229, août 2010.

- [95] A. NOVAK, P. LOTTON et L. SIMON. Synchronized swept-sine : theory, application, and implementation. *Journal of the Audio Engineering Society*, 63(10) :786–798, novembre 2015.
- [96] H. F. OLSON. Direct radiator loudspeaker enclosures. *Journal of Audio Engineering Society*, octobre 1950.
- [97] A. M. PASQUAL, P. HERZOG et J. R. d. F. ARRUDA. Theoretical and experimental analysis of the electromechanical behavior of a compact spherical loudspeaker array for directivity control. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(6) :3478, 2010.
- [98] A. M. PASQUAL, P. HERZOG et J. R. de FRANÇA ARRUDA. Theoretical and experimental analysis of the electromechanical behavior of a compact spherical loudspeaker array for directivity control. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2010.
- [99] A. M. PASQUAL, J. R. d. F. ARRUDA et P. HERZOG. Application of acoustic radiation modes in the direct control by a spherical loudspeaker array. *Acta Acustica united with Acustica*, 2010.
- [100] P. H. PATHAK, G. CARLUCCIO et M. ALBANI. The uniform geometrical theory of diffraction and some of its applications. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 55(4) :41–69, août 2013.
- [101] A. D. PIERCE. *An Introduction to its Physical Principles and Applications*. M. E. FRANK J CERRA, éditeur. McGraw-Hill Book Compagny, 1981.
- [102] A. POHL. *Simulation of Diffraction Based on the Uncertainty Relation - An Efficient Simulation Method Combining Higher Order Diffractions and Reflections*. Thèse de doctorat, HafenCity Universität Hamburg, 2014.
- [103] M. A. POLETTI, P. A. N. WMCF. M. FAZI et WMC. Sound reproduction systems using variable-directivity loudspeakers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 129(1429), 2011.
- [104] M. POLETTI, F. M. FAZI et P. A. NELSON. Sound-field reproduction systems using fixed-directivity loudspeakers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127(6) :3590–3601, juin 2010.
- [105] M. A. POLETTI, T. BETLEHEM et T. D. ABHAYAPALA. Higher-order loudspeakers and active compensation for improved 2d sound field reproduction in rooms. *Journal of Audio Engineering Society*, 63(1/2) :31–45, 2015.
- [106] N. QUAEGBEUR, A. CHAIGNE et G. LEMARQUAND. Transient modal radiation of axisymmetric sources : application to loudspeakers. *Applied Acoustics*, 71 :335–350, 2010.
- [107] B. RAFAELY. Spherical loudspeaker array for local active control of sound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(5) :3006–3017, mai 2009.

- [108] B. RAFAELY, B. WEISS et E. BACHMAT. Spatial aliasing in spherical microphone arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(3) :1003–1010, mars 2007.
- [109] M. REBILLAT, R. HENNEQUIN, E. CORTEEL et B. KATZ. Identification of cascade of hammerstein models for the description of non-linearities in vibrating devices. *Journal of Sound and Vibration, Elsevier*, 2010, 330(5) :1018–1038, 2010.
- [110] D. R. RHODES. On some double orthogonality properties of the spheroidal and mathieu functions. Rapport technique, Air Force Cambridge Research Laboratories, Office of Aerospace Research, 1965.
- [111] D. H. ROBEY. On the radiation impedance of an array of finite cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 27(4) :706–710, juillet 1955.
- [112] R. L. ROLLEIGH, J. G. PRUITT et R. H. STOKES. Vertical side-lobe suppression in cylindrical arrays. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(2) :397–402, février 1977.
- [113] J. A. ROUMELIOTIS, A. D. KOTSIS et G. KOLEZAS. Acoustic scattering by an impenetrable spheroid. *Acoustical Physics*, 53(4) :436–447, juillet 2007.
- [114] A. J. RUDGERS. Acoustic pulses scattered by a rigid sphere immersed a fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 45(4) :900–911, 1969.
- [115] A. J. RUDGERS. Separation and analysis of the acoustic field scattered by a rigid sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 52(1) :234–247, 1977.
- [116] D. RUSSELL, J. TITLOW et Y. BEMMEN. Acoustic monopoles, dipoles, and quadrupoles : an experiment revisited. *American Journal of Physics*, 67(8) :660–664, août 1999.
- [117] S. SAKAI, Y. KAGAWA et T. YAMABUCHI. Acoustic field in an enclosure and its effect on sound-pressure responses of a loudspeaker. *Journal of Audio Engineering Society*, 32(4), avril 1984.
- [118] T. SAKUMA, S. SCHNEIDER et Y. YASUDA. *Fast Solution Methods*. S. MARRBURG et B. NOLTE, éditeurs. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008, pages 333–366.
- [119] G. S. SAMMELMANN, D. H. TRIVETT et R. H. HACKMAN. High-frequency scattering from ridi prolate spheroids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(1) :46–55, 1987.
- [120] E. SCARPETTA et M. A. SUMBATYAN. The contribution of the edge effects in the multiple high-frequency kirchhoff diffraction by plane surfaces. *Wave Motion*, 50(2) :210–225, 2013.
- [121] T. B. A. SENIOR. Scalar diffraction by a prolate spheroid at low frequencies. *Canadian Journal of Physics*, 38, 1960.

- [122] A. F. SEYBERT, B. SOENARKO, F. J. RIZZO et D. J. SHIPPY. An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 77(2) :362–368, 1985. eprint : <https://doi.org/10.1121/1.391908>.
- [123] B. D. SLEEMAN. Integral representations associated with high-frequency non-symmetric scattering by prolate spheroid. *Quarterly Journal of Mechanic and Applied Mathematics*, 1969.
- [124] B. D. SLEEMAN. On diffraction at short wavelengths by a prolate spheroid. *Journ. Inst. Maths Applics*, 1969.
- [125] D. SLEPIAN et H. POLLAK. Prolate spheroidal wave functions, fourer analysis and uncertainty. English. *Bell system technical Journal*, 40(1) :43, 1961.
- [126] R. H. SMALL. Direct-radiator loudspeaker system analysis. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 20(5), 1971.
- [127] R. D. SPENCE et S. GRANGER. The scattering of sound from a prolate spheroid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 23(6), novembre 1951.
- [128] P. R. STEPANISHEN. Acoustic transients from planar axisymmetric vibrators using the impulse response approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(1176), 1981.
- [129] P. R. STEPANISHEN. Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 49(1629), 1971.
- [130] U. M. STEPHENSON. An analytically derived sound particle diffraction model. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(6) :1051–1068, 2010.
- [131] U. M. STEPHENSON. An energetic approach for the simulation of diffraction within ray tracing based on the uncertainty relation. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(3) :516–535, 2010.
- [132] J. E. SUMMERS. Inaccuracy in the treatment of multiple-order diffraction by secondary-edge-source methods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(6) :3673–3676, 2013. eprint : <http://dx.doi.org/10.1121/1.4802650>.
- [133] H. SUZUKI et J. TICHY. Diffraction of sound by a convex or a concave dome in an infinite baffle. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1981.
- [134] H. SUZUKI et J. TICHY. Sound radiation from convex and concave domes in infinite baffle. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1981.
- [135] S. R. SVENSSON U. Peterand Martin et A. ASHEIM. Efficient edge source approach to the modeling of multi-edge noise barrier tops. In *Proceedings of the INTER-NOISE 2016. 45th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*, Hamburg, Germany, août 2016.

- [136] U. P. SVENSSON et A. ASHEIM. Edge-diffraction based integral equation for the scattering from convex rigid polyhedra. In *Proceedings of Forum Acusticum 2011*, pages 179–184. Aalborg, Denmark, 2011.
- [137] U. P. SVENSSON. Numerical aspects of edge diffraction impulse responses. *Acoustical Science and Technology*, 26(2) :218–220, 2005.
- [138] U. P. SVENSSON et P. T. CALAMIA. Frequency-domain edge diffraction for finite and infinite edges. *Acta Acustica united with Acustica*, 95 :568–572, 2009.
- [139] U. P. SVENSSON et P. T. CALAMIA. Edge-diffraction impulse responses near specular-zone and shadow-zone boundaries. *Acta Acustica united with Acustica*, 92 :501–512, 2006.
- [140] U. P. SVENSSON, R. I. FRED et J. VANDERKOOY. An analytic secondary source model of edge diffraction impulse responses. *Journal of Acoustical Society of America*, 106(5) :2331, novembre 1999.
- [141] H. ÜBERALL. Relation between creeping waves and normal modes of vibration of a curved body. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(3) :711–716, 1977.
- [142] H. ÜBERALL, R. D. DOOLITTLE et J. V. MCNICHOLAS. Use of sound pulses for a study of circumferential waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 39(3) :564–578, 1966. eprint : <http://dx.doi.org/10.1121/1.1909929>.
- [143] P. Y. UFIMTSEV. Improved theory of acoustic elementary edge waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(2) :631–635, 2006. eprint : <http://dx.doi.org/10.1121/1.2211447>.
- [144] P. Y. UFIMTSEV et Y. RAHMAT-SAMII. The physical theory of slope diffraction. *Annales Des Télécommunications*, 50(5) :487–498, mai 1995.
- [145] M. URBAN, C. PIGNON, C. COMBET et P. BAUMAN. The distributed edge dipole (ded) model fo cabinet diffraction effects. *Journal of Audio Engineering Society*, 52(10), octobre 2004.
- [146] A. L. VAN BUREN. Acoustic radiation impedance of caps and rings on prolate spheroids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 50(5) :1343–1356, 1971.
- [147] A. L. VAN BUREN et J. E. BOISVERT. Improved calculation of prolate spheroidal radial functions of the second kind and their first derivatives. *Quarterly of applied mathematics*, 2004.
- [148] A. L. VAN BUREN et J. E. BOISVERT. Accurate calculation of the modified mathieu functions of integer order. *Quarterly of applied mathematics*, LXV(1) :1–23, mars 2007.

- [149] J. VANDERKOOY. A simple theorie of cabinet edge diffraction. *Journal of Audio Engineering Society*, 39(12) :923–933, 1991.
- [150] M. V. VESNIK. Efficiency of different heuristic approaches to calculation of electromagnetic diffraction by polyhedrons and other scatterers. *Radio Science*, 49(10) :945–953, 2014.
- [151] R. VISSER. *A Boundary Element Approach to Acoustic Radiation and Source Identification*. Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2004.
- [152] G. WALTER et T. SOLESKI. A new friendly method of computing prolate spheroidal wave functions and wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 19(3) :432–443, novembre 2005.
- [153] G. WEINREICH. Sound hole sum rule and the dipole moment of the violin. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 77(2) :710, 1985.
- [154] G. WEINREICH et E. B. ARNOLD. Method for measuring acoustic radiation fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 68(2) :404, 1980.
- [155] E. G. WILLIAMS et J. D. MAYNARD. Numerical evaluation of the rayleigh integral for planar radiators using the fft. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 72, 1982.
- [156] E. WILLIAMS. *Fourier Acoustics : Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. Academic Press, 1999.
- [157] W. WILLIAMS, N. G. PARKE, D. A. MORAN et C. H. SHERMAN. Acoustic radiation from a finite cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(12) :2316–2322, décembre 1964.
- [158] R. C. WITTMAN et A. D. YAGHJIAN. Spherical-wave expansions of piston-radiator fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90(3), 1991.
- [159] J. R. WRIGHT. Fundamentals of diffraction. *Journal of Audio Engineering Society*, 45(5), 1997.
- [160] H. XIAO, R. V. et N. YARVIN. Prolate spheroidal wavefunctions, quadrature and interpolation. *inverse Problems*, 17(805-838), 2001.
- [161] L. YI, S. YONG et X. JIE. Calculation of loudspeaker cabinet diffraction and correction. *Chinese Physics Letters*, 28(10), octobre 2011.
- [162] L. YI, S. YONG et X. JIE. Calculation of loudspeaker cabinet diffraction and correction. *Chinese Physics Letters*, 28(10), 2011.
- [163] X. ZHONG, Q. WU et X. LI. Influence of enclosure wall vibration on the frequency response of miniature loudspeakers. *Applied Acoustics*, 93 :9–14, juin 2015.
- [164] H. ZHOU et L. HONG. Motion of a rigid prolate spheroid in a sound wave field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(2) :179–184, août 2014.

-
- [165] F. ZOTTER. *Analysis and Synthesis of Sound-Radiation with Spherical Arrays*. Thèse de doctorat, 2009.

Titre : Caractérisation du rayonnement acoustique d'un haut-parleur monté sur une enceinte parallélépipédique allongée. Application à une barre de son.

Mots clés : Acoustique, Rayonnement, Harmoniques sphéroïdales, Modèles numériques, Diffraction, Modèles non-linéaires.

Résumé : Le rayonnement d'un haut-parleur monté sur une enceinte est généralement caractérisé par des mesures ou une simulation par la méthode des éléments finis. Cependant, ces méthodes de référence restent très coûteuses et ne permettent pas une interprétation physique des résultats. Dans ce manuscrit, nous proposons deux modèles analytiques pour prédire ce rayonnement, dans le cadre d'une application à une barre de son. Le premier modèle consiste à assimiler la géométrie de la barre de son à un sphéroïde. De cette manière, les variables sont séparées et on peut trouver une solution analytique sous la forme d'une somme d'harmoniques sphéroïdales. On décrira chaque étape de la méthode, ainsi que la comparaison des résultats à ceux des méthodes de référence. On développera particulièrement le calcul pour un haut-parleur circulaire sur le sphéroïde et la mise en place d'un critère de troncature des harmoniques. Ce modèle fonctionne bien en basse-fréquence, mais ne peut pas rendre compte de tous les phénomènes

de diffraction par l'enceinte en haute fréquence. Pour celles-ci, la diffraction du champ sonore par les arêtes de l'enceinte devient non négligeable. Nous avons donc développé un second modèle analytique, basé sur une formulation intégrale de cette diffraction. Celle-ci est vue comme un ensemble de sources secondaires localisées sur les arêtes. On montrera comment établir ce modèle et on donnera des détails sur son implémentation. L'application de ce modèle permet d'interpréter physiquement le rayonnement d'une barre de son, et donc de conclure sur la validité du modèle sphéroïdal. On montre également comment les arêtes du baffle d'une enceinte entraînent des effets d'interférences constructives, qui peuvent induire un gain allant jusqu'à 3 dB. Ces effets entraînent également un phénomène contre-intuitif : si le haut-parleur n'est pas centré sur le baffle, la direction du maximum d'intensité du rayonnement tend à se décaler vers le côté opposé au décalage du haut-parleur sur le baffle.

Title : Caractérisation of the acoustical field from a loudspeaker mounted on a slender box-shaped enclosure. Application to a sound bar.

Keywords : Acoustic, Radiation, Spheroidal harmonics, numerical models, diffraction, non-linear models.

Abstract : The radiation from a loudspeaker mounted on a box shaped enclosure is usually characterized by measurements or simulations based on finite element method. However, these reference methods are still very expensive and do not allow for a physical interpretation of the results. In this manuscript, two analytical models are proposed to predict this radiation, within the framework of the application to a sound bar. The first model consists of assimilating the sound bar geometry to a spheroid. In this way, the variables are separated and an analytical solution can be found in the form of a sum of spheroidal harmonics. The calculation for a circular loudspeaker on the spheroid, as well as a harmonic truncation criterion, is detailed. Each step of the method will be described, as well as the comparison of the results with the reference methods. The calculation for a circular loudspeaker on the spheroid and the implementation of a

harmonic truncation criterion will be developed. This model works well at low-frequency, but cannot account for the diffraction phenomena, which come from the enclosure and appear at high-frequency. Therefore, we have developed a second analytical model based on an integral formulation of the diffraction. This model is seen as a set of secondary sources located on the edges of the enclosure. It will be shown how to establish this model and how it can be implemented. This model allows us to interpret the radiation of a sound bar, and therefore allows us to conclude on the validity of the spheroidal model. It also shows how the baffle edges of a loudspeaker enclosure lead to constructive interference effects, resulting in a gain up to 3 dB. These effects also lead to a counterintuitive phenomenon: if the speaker is not centered on the baffle, the direction of maximum radiation intensity tends to shift to the opposite side of the speaker offset on the baffle.



